This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909197 7

Curves
(I.c)

Neue Curvenlehre.

Grundzüge einer Umgestaltung der höheren Geometrie durch ihre ursprüngliche analytische Methode.

Von

Adolf Peters,

Doctor der Philosophie, ordentl. Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig und Lehrer der Mathematik am Blochmann-Vitzthum'schen Gymnasium zu Dresden.

Mit 4 Steindrucktafeln.

Dresden,
in der Walther'schen Hofbuchhandlung.
1835.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK.

I. 9

Neue Curvenlehre.

Grundzüge einer Umgestaltung der höheren Geometrie durch ihre ursprüngliche analytische Methode.

Von

Adolf Peters,

Doctor der Philosophie, ordentl. Mitgliede der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig und Lehrer der Mathematik am Blochmann-Vitzthum'schen Gymnasium zu Dresden.

Vorrede.

Indem die folgenden Blätter des Verfassers Entdeckung der ursprünglichen analytischen Methode der höheren Geometrie mittheilen, die Nothwendigkeit dieser Methode zeigen und die Vortheile ihres Gebrauches bei verschiedenen wesentlichen Untersuchungen an einer Folge von Curven nachweisen, können sie sich nur als Keim einer künftigen größeren Entfaltung geben. Diese ist indeß überhaupt nicht Sache eines Mannes; sie fordert den Verein vieler und verschiedenartiger Kräfte. Die Bedeutung, die die vorliegende Schrift haben kann, muß deshalb größerntheils in ihrer Wirkung und deren Folgen gesucht werden. Für jetzt sind die neue allgemeine Methode der Untersuchung selbst, die Ermittelung und Darstellung einiger neuen einfachen Curven, ein erleichtertes Verfahren, die Wendungspunkte und Rückkehrpunkte aufzufinden, die Selbstausmessung der krummen

Linien, eine kürzere und bequemere Methode, das Gesetz der Krümmungsveränderung und den Krümmungskreis, so wie die Punkte der größten und kleinsten Krümmung zu bestimmen, der ursprüngliche Begriff der Aehnlichkeit der Curven und seine Anwendung, die Idee einer Theorie der Metamorphose der Gestalt, die Erörterung der Bedingungen über die Zuwendung der convexen oder concaven Seite, eine neue Methode der Rectification ꝛc., so wie die Erforschung des Complexes der absoluten Eigenschaften mehrerer alten und neuen Curven nach dieser Weise, die materiellen Vortheile, die diese Arbeit der Wissenschaft bieten kann. Das formelle Bestreben des Buches fließt aus dem Bedürfnisse, jede Willkührlichkeit im Gange wissenschaftlicher Entwickelung zu verbannen. Demzufolge ist die Classificationsfrage von neuem näher erwogen und darauf eine Sonderung der Curven-Eigenschaften in zwei Hauptklassen vorgenommen; es ist auf Ordnung, Zusammenhang und relative Vollständigkeit bei der Ableitung der verschiedenen einzelnen Eigenschaften innerhalb jeder Klasse gedrungen und dieser Grundsatz in der ersten durchgeführt. Ferner sind die Coordinaten-Methode und die ihr zur Seite gestellte neue als nothwendige und wesentliche dargestellt, es ist ihre Beziehung zu den Principien gezeigt, dadurch jeder das Gebiet ihrer Thätigkeit angewiesen und

das bisherige analytisch-geometrische Verfahren aus einem höheren Gesichtspunkte übersehen. Hierdurch fließt auch dieser durch lange Zeiten als vortrefflich bewährten Methode noch ein Gewinn zu: man wird sich bewußt, wo ihre Kraft, wo dagegen ihre Schwäche liegt, und warum es so ist; woraus eine Handhabung derselben in einem veränderten Geiste hervorgehen mag. Endlich werden die Grundzüge des nothwendigen Organismus der höheren Geometrie angedeutet und die höhere Einheit der alten und neuen Methode (in den Schlußbetrachtungen) nachgewiesen. — Der systematische Geist der Wissenschaft wird sich am Ende immer zu dem Punkte hingedrängt sehen, ihre großen Massen durch Ableitung und Nebeneinanderstellung der verschiedenen nothwendigen Methoden der Forschung und ihrer Mittheilung zu ordnen.

Was die Darstellung betrifft, so habe ich für meine Pflicht gehalten, die Untersuchungen möglichst zugänglich zu machen, und daher die leider jetzt häufige sogleich von oben herein fahrende höchste Allgemeinheit und gedrungenste Kürze, wenigstens in der Materie selbst, zu vermeiden. Ueberhaupt bin ich so lehrhaft als möglich zu Werke gegangen, habe hier und da einen ausführlicheren Entwickelungsgang dem kürzeren vorangehen lassen, es sind an einigen Orten zweckmäßige Einschal-

tungen gemacht ꝛc. Nach und nach den Geſichtskreis des Lernenden zu erweitern, ihn unvermerkt zu höheren Standpunkten zu erheben und plötzlich, noch ehe er ſeine höchſte Kraft angeſtrengt zu haben glaubt, mit dem Blicke von dem Gipfel der Allgemeinheit zu überraſchen: das iſt die Kunſt, der wir als Lehrer nachſtreben ſollen. An der durchgängigen Verfolgung dieſes Strebens hinderten mich indeß verſchiedene Umſtände, von denen der hauptſächlichſte weiter unten erwähnt iſt.

Einige Worte über die Entſtehung der mitgetheilten Forſchungsweiſe mögen ſich hier anſchließen. Nicht ein kühner glücklicher Blick, ſondern die einfache Anſchauung von dem eigenſten Weſen der Curve, die ſich ſchon in den Jünglingsjahren bei der Beſchäftigung mit den krummen Linien meiner Vorſtellung aufdrang, veranlaßte die neue Auffaſſung. Ein innerſtes Geiſtesbedürfniß, das mich ſpäter jahrelang quälte und reizte, und in den vorhandenen Methoden, ungeachtet mannigfacher Verſuche, beſonders mit der ſynthetiſchen, keine volle Befriedigung finden ließ, erhob dieſen Grundgedanken mehr und mehr zur Klarheit, und forderte endlich gebieteriſch ſeine Entwickelung. Wenn dieſes Bedürfniß ein wahrhaft wiſſenſchaftliches war, wie ich dieß in der Einleitung zu zeigen geſucht habe, ſo muß es einem ähnlichen in verwandten Geiſtern entgegenkommen

oder es wecken, dadurch eine ergiebige Quelle von Erkenntniſſen werden und einen vortheilhaft veränderten Standpunkt der höheren Geometrie begründen. Die Zukunft wird daher über Werth oder Unwerth des angeſtellten Verſuches unfehlbar und recht entſcheiden.

Deſſen ungeachtet ſind die öffentlichen Urtheile bei dem erſten Erſcheinen der Schrift keineswegs gleichgültig. Vermag auch die Kritik niemals das Unbedeutende und Nichtige dauernd zu heben, noch das Tüchtige und Reelle zu unterdrücken, ſo kann ſie doch mehr oder weniger hemmend und lähmend oder fördernd und miterntwickelnd einwirken. Ich bin in dieſer Rückſicht auf die abweichendſten Erfahrungen, auf günſtige Aufnahme von der einen, auf heftige Angriffe von der andern Seite gefaßt, das Letztere ſchon deshalb, weil alles Neue, will es auch noch ſo gern beſcheiden und anſpruchlos auftreten, ſich denn doch ſeiner Natur nach muß geltend machen wollen, und dadurch ein natürlichen Widerſtand, beſonders in Geiſtern von alter lieber Gewohnheit, hervorgerufen wird. Indeß bekenne ich gern, das allgemeine Mißtrauen, das ſich in unſern Tagen gegen die öffentliche Kritik erhebt, im Allgemeinen nicht zu theilen. Ich denke mir überhaupt am liebſten den Beurtheilenden von reinem Character, einſichtig, vorurtheilsfrei und unpartheiiſch, von der Wiſſenſchaft erwärmt

und nur in ihrem Intereſſe handelnd, das Gewordene kennend und liebend, das Werdende pflegend und ſchützend, nur das Irrige, Verfehlte und Schlechte zerſtörend. Jedenfalls giebt ſich eine geſunde Kritik, ſei es in Lob oder Tadel, ſogleich dadurch kund, daß ſie vor allen Dingen den Standpunkt des Verfaſſers, die Bedeutung ſeiner Leiſtung, ihre Beziehung zu der Fortbildung oder Verbreitung der Wiſſenſchaft, alſo Weſen und Kern der Sache auffaßt und würdigt, und darauf erſt einzelne Eigenthümlichkeiten, Mängel und Fehler, Vorzüge und Tugenden als das bezeichnet, was ſie im Verhältniſſe zum Ganzen ſind. Jeden in dieſem Sinne wohlwollend ausgeſprochenen begründeten Tadel, er betreffe das Ganze oder Einzelnes, jede Erweiterung, Verbeſſerung und Berichtigung von Männern, die mir an Einſicht und Umſicht überlegen ſind, werde ich mit dem aufrichtigſten Danke erkennen. Denn alles dieſes nutzt der Wiſſenſchaft; nur die Begeiſterung für ſie ſchuf meine Arbeit.

Noch einflußreicher vielleicht als die öffentlichen Beurtheilungen ſind im Stillen gehegte oder privatim ausgeſprochene Anſichten gewiegter namhafter Männer der Wiſſenſchaft, ſo wie aufſtrebender junger Talente. So viel Gewicht indeß auch dem lauten und ſtillen Urtheile beigelegt werden muß, ſo iſt doch im vorliegenden Falle eine thätige Theilnahme unläugbar das Wichtigſte,

und das, worauf es zuletzt ankommt. Schon die ebenen Curven eröffnen der neuen Forschungsweise einen weiten Spielraum, wie unermeßlich ist erst das von dieser Methode noch unbebauete Feld der doppelt gekrümmten Linien und gebogenen Flächen! — Auf dem kaum betretenen Wege lassen sich überall die reichsten Lorbeern ernten, und es kommt nur darauf an, welche Geister die ersten sind, die tiefer eindringen. Möchte deshalb die neue Methode sich alsbald der thätigen Mitwirkung fähiger Männer erfreuen!

In dieser Hoffnung einer baldigen weiteren Behandlung und dadurch allgemeineren Verbreitung der neuen Methode bestärkt mich der günstige und an sich bedeutende Umstand, daß bereits ein zweiter, angesehener Forscher, K. Chr. Fr. Krause, einen Weg eingeschlagen hat, der, so weit ich aus der darüber mir bis jetzt nur zu Gesicht gekommenen Anzeige ersehen kann, auf demselben Grundgedanken beruht und meinem Verfahren mehr oder weniger ähnlich sein muß. Denn wenn zwei verschiedene Männer völlig unabhängig von einander verwandte wissenschaftliche Gedanken darstellen, so wird schon dadurch wahrscheinlich, daß ihr Hervortreten durch den Entwickelungsgang der Wissenschaft geboten und die Erscheinung zeitgemäß sei. Auch ist die eigenthümliche erste Erfassung desselben Gegenstandes von

„heit schrieb. Zu dieser Zeit, im December 1833 be„schäftigte ich mich mit dem Versuche, die synthetische „Methode der Alten systematisch zu begründen, durch „Mitanwendung der Rechnung zu erweitern und ihr „Gebiet in's Unendliche auszudehnen. Ich construirte „und berechnete neue Curven nach dieser Methode u. s. w. „Aber immer wieder drängte sich das Gefühl ihrer Un„zulänglichkeit, das Bewußtsein von der Relativität dieser „so wie der Coordinaten-Methode und damit das Be„dürfniß einer sachgemäßeren Behandlung hervor. Schon „Jahre lang hatte ich den Grundgedanken hierzu deut„lich aber unfruchtbar mit mir herumgetragen; jetzt „fühlte ich mich angespornt, diesen alten Curven-Gedan„ken wieder hervorzuziehen, und ihn hartnäckiger, als „es schon einmal früher geschehen war, zu verfolgen. „Es gelang, und ich theilte einem mathematisch-philo„sophischen Freunde, Karl Snell, *) die erste gelun„gene Entwickelung mit. Er war einverstanden da„mit und feuerte mich zur Fortsetzung an; ein vorge„rückter damaliger Schüler, Leonard Collmann aus Lon„don, zeichnete unter meiner Leitung die neuen Linien, „während ich fortarbeitete. Später, nach ¾ Jahren, er„fuhr ich plötzlich, daß die neue Curven-Methode, wo„mit Krause in den letzten Jahren seines Lebens be„schäftigt war, mit der meinigen verwandt oder dieselbe „sei. Weder in mündlichen noch schriftlichen Mittei„lungen hatte Krause jemals ein Wort über das Wesen „seines Princips oder seiner Methode gegen mich geäu„ßert; auch ist mir in dem, was ich von Krause's „Schriften gelesen, keine Andeutung dieser Art zu Ge„sicht gekommen, obgleich, wie Leonhardi schreibt, Krause

*) Lehrer der Mathematik an hiesiger Kreuzschule.

„schon viel früher (1802) hierher gehörige Winke und „Elemente druckschriftlich mitgetheilt hat, die daher we„nig bekannt geworden sein müssen oder doch nicht ge„hörig beachtet worden sind. Ich war daher sehr über„rascht, theils schmerzlich, weil ich mich für den ersten „und einzigen Entdecker hielt, theils angenehm, indem „ich einerseits von einem Andern der Methode dieselbe „hohe Bedeutung beigelegt sah und dieser Andere Krause „war, andererseits der Wissenschaft, der ich mit begei„sterter Neigung anhange, desto mehr Vorschub gelei„stet wird.“

„Krause's mathematischer Nachlaß enthält, wie mir „Leonhardi in ausführlicher Angabe der Gegenstände der „Forschung mitgetheilt hat, noch viele Reichthümer, die „mich äußerst schätzbar dünken. Doch bin ich am be„gierigsten auf die Erscheinung der besprochenen Schrift, „um sie sogleich nach erfolgtem Drucke der meinigen „(die unter dem Titel: Neue Curvenlehre, diesen Som„mer herauskommt) mit dieser vergleichen zu können. „Möchten wir zum Besten der Wissenschaft bald durch„dringen! Eine mächtige Wirkung und zwar auf die „ganze Mathematik kann nicht ausbleiben, geschehe sie „nun früher oder später; um dieses zu sehen bedarf es „keines Propheten-Blickes. — — —“

Hierauf antwortete Herr Prof. Schröder, den ich bei dieser Gelegenheit als einen sehr wackern Mann kennen lernte, unter anderm:

„— — Wirkliche Freude machte mir ihre gütige „Mittheilung, daß Sie bereits seit einem Jahre mit der „Ausarbeitung einer neuen Curvenlehre beschäftiget seyen,

„deren allgemeines Princip daſſelbe urſprüngliche, aus „dem Begriffe der krummen Linie ſelbſt hervorgehende „iſt, welches auch Krauſe entdeckt, in mehreren hinter„laſſenen Handſchriften ausführlich entwickelt, und zur „vollſtändigen wiſſenſchaftlichen Entfaltung des gan„zen Organismus der krummen Linien bis auf gewiſſe Tiefe „durchgeführt hat. Ein ganz neues, weſentliches „Element der Geometrie, die Wiſſenſchaft von der in„nern Weſenheit der krummen Linien ſelbſt, unab„hängig von ihren äußeren Beziehungen zu andern ge„raden und krummen Linien im Raume, hat an Ihnen „ſomit zur ſelben Zeit, zu welcher ſie zuerſt an's Licht „tritt, ſchon einen Mitarbeiter gewonnen; und dieß be„ſtärkt mich in der zuverſichtlichen Hoffnung, daß dieſer „grundwichtige Theil der Geometrie nicht lange unbe„rückſichtiget bleiben werde."

„Allein eine Bitte kann ich nicht unterdrücken, und „dieſe beſteht darin, daß Sie um der Wiſſenſchaft wil„len auf Ihr unbeſtreitbares Recht, die neuen Curven, „die Sie entdeckt und bearbeitet haben, zu benennen, „freiwillig verzichten; Krauſe hat ſie bereits ſyſtematiſch „benannt, und ſeine Arbeit kann nach ſeinem Tode in „dieſer Hinſicht keine Aenderung mehr erfahren; Sie aber „können durch ein Opfer, das Sie der Wiſſenſchaft ge„wiß zu bringen bereit ſeyn werden, die unangenehme „Verwirrung verhüten, welche gleichzeitig an's Licht tre„tende verſchiedene Benennungen einer und derſelben „Sache unvermeidlich verurſachen würden. Ich bitte ſie „deshalb herzlich der Wiſſenſchaft dieß Opfer zu bringen."

Später, vor etwa acht Wochen, als die Krauſe'ſche Schrift eben im Drucke fertig geworden war und ver-

sendet werden sollte, ich aber den Herausgeber kurz vorher schriftlich gebeten hatte, mir das Werk noch nicht zu schicken, da ich gerade mit dem Abschlusse des meinigen, das jetzt gedruckt werden solle, beschäftigt sei, und deshalb nicht Zeit habe, jenes zu lesen, geschweige denn in dem meinigen mich noch darauf zu beziehen, auch bei meinem seitherigen Bemühen wohl wünschen dürfe, daß mir die volle Integrität meiner Arbeit erhalten werde, erwiederte Herr Prof. Schröder:

„Ihr Wunsch, daß den ersten Anfängen Ihrer „Forschungen der Stempel der Unabhängigkeit und Ei„genthümlichkeit erhalten werde, in dessen Erfüllung ich „für die Wissenschaft Vortheile sehe, läßt mich mein „Verlangen unterdrücken, Ihnen jetzt nähere und be„stimmtere Mittheilungen über Krause's Arbeiten, und „über den so eben gedruckten ersten Band derselben zu „machen, welchen Fleischmann in München in Commis„sion hat, und welcher den Titel führt: **Novae theoriae „linearum curvarum originariae et vere scientificae „specimina quinque prima. Auctore Carolo Chris„tiano Friederico Krause. Edidit: Professor H. „Schröder. Monachii anno MDCCCXXXV. Sump„tibus editoris.**"

„Ich beschränke mich übrigens darauf, Ihnen über „die Geschichte von Krause's Arbeit über die Curven „folgende kurze Mittheilung zu machen, welche ich Sie, „bei der Hinweisung auf Krause's Arbeit in Ihrer „Vorrede, daselbst mit aufzunehmen ersuche."

„Die Anfänge der neuen Curvenlehre, welche in „den obengenannten quinque specibus entfaltet sind,

„wurden aus einem größeren Werke entnommen, wel„ches Krause im letzten Jahrzehnt seines Lebens aus„gearbeitet hat. Das Princip selbst wurde schon im „Jahre 1799 von ihm entdeckt, und er hat die auf „dasselbe gegründete Theorie des Kreises, welche das „zweite Specimen des in Frage stehenden ersten Ban„des enthält, schon vor mehr als 30 Jahren ausgear„beitet, und in seinen Vorlesungen über reine Mathe„matik, die er in den Jahren 1802—1804 an der „Universität zu Jena hielt, seinen Schülern mitgetheilt. „Krause hat diese Theorie des Kreises auch druckschrift„lich in seiner Dissertation: de philosophiae et mathe„seos notione earumque intima conjunctione (Jenae „1802), und an andern Orten erwähnt, und über die „ursprüngliche Methode, die krummen Linien wissen„schaftlich zu entfalten, in seinem Werke: Anleitung zur „Naturphilosophie Jena 1804, p. 127 u. f. f. einiges „Allgemeine mitgetheilt. Vom Jahre 1802 angefan„gen, hat derselbe die Theorie der Curven von einfa„cher und doppelter Krümmung nach und nach geome„trisch und analytisch handschriftlich entwickelt, und end„lich in den letzten zehn Jahren seines Lebens die The„orie und Construction der Linien, welche nach der ur„sprünglichen Betrachtung vom ersten und zweiten alge„braischen Grade sind, und ebenso der Linien von ein„facher Krümmung, welche von trigonometrischen und „logarithmischen Functionen abhängen, vollendet. Unter „die trigonometrischen Linien von sehr einfachen Func„tionen gehören auch die Kegelschnitte. — —“

„Ich habe in meiner Vorrede Ihrer Arbeit mit fol„genden Worten gedacht: Quum in hoc libello in lu„cem emittendo versabar, pergratum mihi fuit com„perire, alium Geometram, Dr. Peters Dresdensem,

„virum reverendissimum, in nova theoria curvarum „ilsdem principiis originariis, quibus sequentia haec „specimina nituntur, superstruenda jam per aliquod „tempus operam collocare. Cum enim Dr. Peters „identitatem principii ex conspectu hujus libri, qui „alii operi philosophico auctoris jam anno praete„rito additus erat, cognovisset, primo quidem illius „operis editorem, Hermannum de Leonhardi, amicum „meum, de hac re per litteras adiit, postea vero „mihi ipsi hanc epistolam scripsit, quam huc inse„rendam curavi; ceterum lectores commonitos ve„lim, Dr. Peters auctoris nostri manu scripta num„quam inspexisse, et quod ego sciam, nec ab auc„tore ipso nec ab alio quoquam novi hujus theo„riae curvarum principii ullam notionem antea acce„pisse. Hier folgt wörtlich Ihr Brief in deutſcher „Sprache.“ *)

Was jene Bitte anlangt, ſo verſteht es ſich von ſelbſt, daß mir die Pietät gegen den ehrwürdigen Verſtorbenen, den ich als tiefen und gelehrten Forſcher hochſchätzte und ſelbſt als Freund liebte (ich erfreute mich vor zehn Jahren zu Göttingen eine Zeit lang ſeines perſönlichen Umganges) vorſchrieb, die von mir entworfenen Namen neuer Curven wieder zurückzunehmen. Nur ein einziger für jenes Benennungsſyſtem keinesfalls hinderlicher iſt, zu meinem Andenken etwa, zurückgelaſſen. Auch die Namen der nach der neuen Methode gebildeten be-

*) Es iſt der oben zuerſt mitgetheilte.

kannten alten Curven, den Kreis ausgenommen, sind nicht ausdrücklich genannt. Sogar einen Theil der schon gezeichneten neuen krummen Linien selbst habe ich zurückbehalten und nur einige mitgetheilt, theils auch deshalb, weil mir bei den wenigen bedrängten Mußestunden, die ich dieser Arbeit widmen konnte, nicht Zeit zu ihrer gehörigen Bearbeitung blieb. Ueberhaupt sind manche noch unvollendete Forschungen weggelassen, und es hat meine Mittheilung bei weitem nicht die Abrundung, relative Vollständigkeit und Vollendung erhalten, die ich ihr früher zugedacht hatte, weil es wichtig war, daß sie möglichst zugleich mit der Krause'schen in Wirkung trat, und ich mich deshalb zu beeilen hatte. So z. B. mußte die Theorie der Selbstbedeckung, Schneidung ꝛc. und die Ableitung der Polar-Gleichung aus der ursprünglichen und umgekehrt, weil sie noch nicht vollendet waren, wegbleiben. Sollte diese Schrift das freilich unwahrscheinliche Glück haben, eine zweite Auflage zu erleben, so würde ich nicht nur für diese Ergänzungen Sorge tragen, sondern auch andere zum Theil schon vorbereitete Untersuchungen hinzufügen, diesen und jenen Uebelstand heben, Vieles sorgfältiger ausarbeiten und besser ordnen, manchem Gegenstande einen mehr angemessenen Platz anweisen und besonders die Betrachtungen weiter ausdehnen und eine größere Menge zum Theil neuer Formen

in Frage ziehen. Auch ſollte Sorgfalt darauf verwendet werden, daß das Buch durchgreifend den Character eines Lehrbuches erhielte, was jetzt nicht ganz der Fall ſein konnte, da der Vortrag von der anderen Seite den Character einer erſten Darſtellung feſthalten und an manchen Stellen ſogar polemiſch auftreten mußte. Selbſt für die Vorbeugung möglicher Mißverſtändniſſe hätte ich hier und da gern etwas gethan (woran die Kürze der Zeit mich hinderte), z. B. die Grundverſchiedenheit der Polar-Coordinaten-Methode und der urſprünglichen näher beleuchtet; beide ſind ſo gänzlich heterogen, daß die erſtere nicht einmal Veranlaſſung zu der Entſtehung der letzteren gegeben hat. Hierher gehörte auch noch eine Gegeneinanderſtellung der rein geometriſchen und der ſtatiſchen und dynamiſchen Methoden der analytiſchen Geometrie. Letztere ſind ebenfalls äußerſt wichtig, und wenn auch ſecundärer, doch in gewiſſem Sinne höherer Natur, als die rein geometriſchen Methoden, die in der mitgetheilten einen neuen Zuwachs erhalten, und deren vollſtändiges Syſtem in dieſen Blättern vorbereitet iſt.

Das Studium der Forſchungen Krauſe's wird übrigens, aller Vermuthung nach, Keiner entbehren können, der der gegenwärtigen Schrift ſeine Theilnahme geſchenkt hat. Sie enthalten höchſt wahrſcheinlich einen bedeutenden

Schatz wichtiger Mittheilungen, und ich muß erwarten, in wie weit wir zusammengetroffen sind.

Schließlich entledige ich mich noch der Pflicht, Herrn stud. architect. Collmann, jetzt in München, Herrn stud. jur. Stelzner, jetzt in Leipzig, und Herrn Kohl, Lehrer der Mathematik hierselbst, öffentlich meinen Dank für die bereitwillige Güte zu sagen, mit der sie die auf den Tafeln III und IV verzeichneten krummen Linien (so wie andere hier nicht mit dargestellte) bildeten, und zu diesem Zwecke unter meiner Leitung vorher sorgfältig berechneten.

Möge denn der neue Sprößling der Wissenschaft glücklich gedeihen und der Gegenwart wie der Zukunft reiche Früchte tragen!

Dresden, im August 1835.

Adolf Peters.

Inhalt.

Seite.

Erster Abschnitt: Einleitung.

Kap. I. Werth und Nothwendigkeit der höheren Wissenschaftlichkeit 1

Kap. II. Kritik der Coordinaten-Methode 17

Zweiter Abschnitt: Ursprünglich-begriffliche Auffassung der gesetzmäßigen Raumgebilde.

Kap. I. Entwickelung und allgemeine Bezeichnung des ursprünglichen Begriffes der ebenen Curve. Geometrische Bedeutung der Vorzeichen 34

Kap. II. Entwickelung des ursprünglichen Begriffes der doppelt gekrümmten Linie und der gebogenen Fläche . . . 55

Dritter Abschnitt: Ueber die Eintheilung der ebenen Curven und ihrer Eigenschaften.

Kap. I. Unterscheidung zweier Hauptsysteme von Eigenschaften. Umriß eines allgemeinen Systemes der absoluten Eigenschaften ebener Curven 71

Kap. II. Andeutungen über die Eintheilung der Curven selbst 83

Kap. III. Betrachtung der Gleichungen des ersten und zweiten Grades zwischen den beiden veränderlichen Bestandtheilen, in Beziehung auf die Unterscheidung der darin enthaltenen geometrischen Objecte 93

Vierter Abschnitt: Allgemeine Methoden zur Ableitung absoluter Eigenschaften der ebenen Curven.

Seite.

Kap. I. Methode, die Uebergangspunkte, ihre Art, Anzahl und Lage zu finden 108

Kap. II. Methode, die Stärke der Krümmung einer Curve an jedem beliebigen Punkte oder das Gesetz der Krümmungsveränderung zu finden. Berechnung der Punkte der stärksten und schwächsten Krümmung, des Krümmungskreises und Krümmungshalbmessers. Bedingungen der Unwandelbarkeit der Gestalt einer Curve. Die Metamorphose der Gestalt 116

Kap. III. Bedingungen der Convexität und Concavität . . 142

Fünfter Abschnitt: Bestimmung der absoluten Eigenschaften einzelner Curven.

Kap. I. Die Kreislinie 160

Kap. II. Die einfachste Curve nach der Kreislinie . . . 171

Kap. III. Die Wechselkrumme der einfachsten ungleichmäßig gekrümmten Linie 187

Kap. IV. Die Linie $w = \frac{1}{2} \pm \gamma(\frac{1}{4} - s^2)$ oder die Linie der Kreisgleichung (aus dem Scheitelpunkte) unter rechtwinkligen Coordinaten, für den Durchmesser $= 1$. 194

Kap. V. Die Linie $w = a \cdot \frac{1}{s}$ 215

Kap. VI. Einige höhere Curven 225

Sechster Abschnitt: Ableitung von relativen Eigenschaften ebener Curven.

Kap. I. Die Rectification ebener Curven aus der ursprünglichen Gleichung 230

Kap. II. Ableitung der ursprünglichen Gleichung aus der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten 240

Kap. III. Ableitung der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten aus der ursprünglichen Gleichung 247

Schlußbetrachtungen 257

Erſter Abſchnitt.

Einleitung.

Erſtes Kapitel.

Werth und Nothwendigkeit der höheren Wiſſenſchaftlichkeit.

Die Mathematik nähert ſich ſeit dem Ablaufe des vorigen Jahrhunderts mehr und mehr einem wichtigen Entwickelungspunkte, dem Uebergange zur Stufe der höheren Wiſſenſchaftlichkeit. Damit der ſtreng begriffliche Inhalt dieſer Anſicht hervortrete, ſind ſcharfe Bezeichnungen nothwendig.

Mathematiſche Wiſſenſchaftlichkeit im gewöhnlichen Sinne beſteht in ſtrenger Bewahrheitung der einzelnen Lehren, in einer ſolchen Aneinanderreihung derſelben, daß ſich die folgenden durch die vorhergehenden begründen laſſen, und da-

her alle eine logisch fest geschlossene Kette bilden. Dieses kann zwar nicht geschehen ohne Zurückbeziehung auf letzte Grundsätze: diese selbst aber werden nur so weit, als sie sich hinterher unentbehrlich zeigen, nur vereinzelt und gleichsam aus Noth hingestellt, wie es z. B. bei Euklides in die Augen fällt. An einem die Wissenschaft wahrhaft gestaltenden, sie zum Denk-Organismus mit innerlich nothwendiger Gliederung umschaffenden Principe wird es mangeln, und dieser Mangel durch einen künstlichen Bau, durch willkührliche Methoden, durch ein nach äußerlichen oder doch weniger wesentlichen Unterscheidungsmerkmalen gebildetes Fachwerk ersetzt werden.

Diese Weise wissenschaftlicher Thätigkeit findet nothwendig da Statt, wo gewonnenes Material zum ersten Male in einen Zusammenhang gebracht werden soll, überhaupt allenthalben, wo sich neuer Stoff der Wissenschaft in großen imposanten Massen hervordrängt, wo eine Fülle von Wahrheiten ganz neuer, überraschender und bedeutungsvoller Art entspringt. Hiermit übereinstimmig zeigt die Geschichte, daß nicht allein die Mathesis der Alten, sondern auch die glänzende Mathematik des 17. und 18. Jahrhunderts dieser Sphäre angehört.

Die Griechen arbeiteten den Gehalt der niederen, die Modernen den der höheren Mathematik zuerst heraus; dort wurden zuerst die Sätze der Elementar-Geometrie und Arithmetik zu wissenschaftlicher Wahrheit gestempelt, und hier trat die Analysis, besonders die höhere, mit Alles überwältigenden Kräften, mit so reichen Entwickelungen hervor, daß wohl nirgends an mehr als an streng logische Verknüpfung im gewöhnlichen Sinne zu denken war. Beide Perioden fallen also in eine Haupt-Epoche, da sie das entschiedene Vorwalten des Gehaltes über die höhere wissenschaftliche Form mit einander gemein haben.

Daß es in einer von beiden Perioden anders hätte gewesen seyn können, ist undenkbar.

Es mußte den griechischen Geometern überall nur darum zu thun sein, die Sätze so zu ordnen, daß jeder einzelne streng bewiesen werden konnte, es handelte sich lediglich um die Unerschütterlichkeit der Beweisführungen, um die Feststellung der Wahrheiten, um die Existenz des Stoffes oder Gehaltes der Wissenschaft. Die Sätze selbst, besonders die bedeutendsten, denen die andern nur zu dienen scheinen, waren allzu überraschend und interessant, um

nicht die ganze Aufmerkſamkeit und Thätigkeit hinwegzunehmen. Freilich aber mußte eine Geſtaltung dieſes Stoffes, eine Verknüpfung der Sätze zu einem Ganzen, eine Form Statt finden, aber dieſe konnte ihres angegebenen beſchränkten Zweckes wegen nichts weiter ſein, als die ſtrengſte Bündigkeit im Einzelnen und Ganzen; und gerade darin beſteht ihre relative, von den Neueren unerreichte Vortrefflichkeit. Sie war mit großem Scharfſinn erſonnen, ſie war lediglich Weg zu dem eigentlichen Ziele, den bewieſenen Sätzen ſelbſt. Daß der bloße Beweis zu einer eigentlichen Entwickelung des Zuſammenhanges der Bedingungen unter ſich und mit den Principien, zum Theil vermöge der nothwendigen Stellung im Organismus des Ganzen zu potenziren ſei, und die daraus hervorgehende Bewahrheitung als ſolche gar nicht die alleinige weſentliche Abſicht der Entwickelung ausmache, daß das Syſtem der Wahrheiten mehr als eine kunſtvolle Aneinanderkettung derſelben ſein müſſe, daß es auf die Nothwendigkeit der Form eben ſo ſehr als auf die Nothwendigkeit des dargeſtellten Inhaltes ankomme, mußte den griechiſchen Meiſtern fern liegen. Form und Inhalt konnten ſich nicht in ſchöner

Freiheit durchdringen, der letztere war das Bestimmende, die erstere nur eine gewissenhafte Dienerin desselben. In diesem Uebergewichte des Inhaltes über die Form, wie es sich wohl am passendsten bezeichnen läßt, besteht das Wesen der mathematischen Wissenschaftlichkeit im gewöhnlichen Sinne oder der niederen Wissenschaftlichkeit. Aber dieser Charakter wurde bei den Griechen so rein, vollendet und herrlich ausgebildet, daß die Werke, die ihn tragen, als unübertreffliche Muster ihrer Gattung dastehn.

War die Kindheit der mathematischen Wissenschaft in Griechenland in dieser Begrenzung so schön, der Feier und des Preises, die ihr in vollem Maaße zu Theil geworden, vollkommen würdig, so stralte ihr Jünglingsalter in noch höherem Glanze. Die drei großen Meister des Alterthumes, Euklides, Archimedes und Apollonius stehen wieder auf und erwecken einen Zug verwandter Genien, der wie im Triumphe durch die beiden abgelaufenen Jahrhunderte schreitet, und dem sich noch im gegenwärtigen ebenbürtige Genossen, Männer wie Gauß, Monge u. a., anschließen. Sie entdecken eine neue Welt des Geistes, und beginnen mit ihren Schätzen eine unendliche Schöpfung. Fast das ganze Gebiet der theoretischen Mathematik, sammt dem der Astronomie

und Physik wird erobert, die Thätigkeit ist so groß und der Gewinn so unermeßlich, daß es der abstractesten Wissenschaft gelingt, die Aufmerksamkeit und Theilnahme der ganzen gebildeten Menschheit zu erregen und zu fesseln. — Wie hätte es anders sein können, als daß bei der ersten raschen Entwickelung eines so großen kaum geahnten Gehaltes der Wissenschaft dieses Material selbst, die wichtigen Resultate der Untersuchungen das Hauptaugenmerk blieben, und Alle immerfort auf die Gewinnung der möglichst größten Menge neuer Wahrheiten hinarbeiteten, gleichviel, auf welche Weise die Ableitungen geschehen mochten. Die Allgemeinheit und Kürze der Methoden war nächst ihrer Beweiskraft der alleinige Maaßstab ihrer Vortrefflichkeit, und wenn gleich diese Merkmale höchst wichtig sind, so dürfen sie doch keinesweges für die allein entscheidenden gelten. Vielmehr ist die entscheidende Frage für jede theoretische Methode, ob sie eine nothwendige, d. h. durch die Entfaltung des Wissenschaftbaues oder durch die Entwickelung der Grundideen der Wissenschaft gebotene sei; ist dieses, so ist sie standhaltig, denn alle übrige Tugenden der Methode sind nothwendig im Gefolge dieser Haupteigenschaft. — Es zeigt sich also, daß dieser

zum Theil noch jetzt fortdauernde Zeitabſchnitt den Hauptcharacter, das Vorherrſchen des Stoffes vor der Form, mit den Griechen theilt, nur daß das Allgemeinere der Unterſuchungen, das Analytiſche der Methoden der Form mehr Freiheit gab, und die Strenge der alten Methode milderte. Aber deſſen ungeachtet hing dieſe Form ganz allein vom Gehalte ab, lediglich auf dieſen kam es an, und auf jene nur in ſo fern, als ſie eine ſichere und geſchickte Geburtshelferin ſein mußte. Derjenige Weg der Forſchung und diejenige Anordnung des Erforſchten waren die beſten, wodurch die größte Summe bedeutender Wahrheiten auf das Bequemſte dargeſtellt wurde. Wir finden alſo auch in dieſer herrlichen Periode den Charakter der niederen Wiſſenſchaftlichkeit wieder, und in beiden geſchilderten Zeitabſchnitten eine große Epoche, die des erſten Entdeckens der verſchiedenartigen Hauptgebiete der Wiſſenſchaft, gewiſſermaßen der Umſchiffung ihrer Welt, der Orientirung in ihr, und der Gewinnung ihrer nächſten und werthvollſten Producte abgeſchloſſen. Abgeſchloſſen jedoch nur, in ſo fern man eine Epoche abgeſchloſſen nennen kann, deren eigenthümliche Thätigkeit in den folgenden Zeiträumen und vielleicht durch alle Zeiten fortgeht, nur daß ihr Geiſt nicht

mehr ausschließlich waltet und nicht mehr die Herrschaft führt. Denn es ist die Eigenthümlichkeit jeder höheren Thätigkeit des wissenschaftlichen Lebens, daß sie die niederen in sich aufnimmt, daß diese innerhalb des weitern Kreises fortarbeitet, und weit entfernt, an Würde zu verlieren, daran gewinnt, nur daß es allein durch die Beziehung ihrer Ergebnisse auf die erwachte höhere Thätigkeit geschieht.

Wenn man nun gleich die Bemerkung richtig fände, daß selbst manche bedeutende Gelehrte der Mathematik kaum ein deutliches Bewußtsein von dem in gewisser Rücksicht Wichtigsten haben, was vorgeht, so läßt sich doch die immer größere Annäherung an die zweite Haupt-Epoche, die der höheren Wissenschaftlichkeit, in unseren Tagen nicht mehr verkennen. Leise, kaum merkbar, fing diese Bewegung an, sie ist jetzt in verschiedenen Theilen der Mathematik schon deutlich wahrnehmbar, in stetigem Wachsthume und immer größerer Ausbreitung begriffen und wird im Fortgange des Jahrhunderts mehr und mehr beschleunigt erscheinen.

Betrachtet man zuerst, um dieses näher zu erörtern, die Richtung der Zeit im Allgemeinen, so zeigt sich zwar, daß neuerdings die Welt mehr als

je verlangt, die Wiſſenſchaft ſolle auf die Anwendung hinarbeiten. Die Forſcher ſollen ſich um das Gold der Wiſſenſchaft nur deßhalb bemühen, um es ſo ſchnell als möglich in Kupfermünze für das praktiſche Leben umzuſetzen. Geſchieht das nicht, ſo wird über leere Speculation, unnütze Grübelei u. dgl. geeifert. Glücklicherweiſe hat aber die Mathematik einen ſo kräftigen nach innen gehenden Lebenstrieb, daß ihre Pfleger jetzt wie immer, ohne jene Forderungen, wie weit ſie billig ſind, zu überhören, an den bedeutendſten theoretiſchen Speculationen unerſchütterlich feſthalten.

Forſcht man dann weiter im Beſondern nach, ſo zeigt ſich dem wachen Auge die erfreuliche Erſcheinung eines Strebens nach edlerer innerer Geſtaltung der Wiſſenſchaft. Verkündet nicht Alles ſeit langen Jahren ein Anfangs dunkel geweſenes, aber immer bewußter werdendes Ringen nach höherer Freiheit und Selbſtſtändigkeit, größerer Tiefe und Vollendung der Mathematik? Sie hat angefangen, über den ausſchließlichen methodiſchen Grundſatz bloß ſtarrer Conſequenz und hier und da ſelbſt über den der Willkühr in der Auffaſſungs- und Behandlungsweiſe, den Methoden und Abſtufungen ſich zu erheben, ſie macht ſich mehr und mehr von der

Abhängigkeit los, vermöge welcher sie sich in ihren inneren Kreisen hauptsächlich nach Bedingungen und Anregungen der Erfahrungswissenschaften formte (wobei sie übrigens den Zufluß, den sie von dieser Seite fortwährend erhalten wird, keineswegs zu verschmähen hat), und wird eben dadurch eine desto stärkere und gewandtere Dienerin derselben. Nur daß sie auf ihrem eigenen Gebiete mehr und mehr jene ideale Würde anstrebt, die aller Wissenschaften geistiger Scepter und geweihete Krone ist. — Um ein einzelnes Beispiel anzuführen, woher rührt es, daß man in Frankreich und Deutschland, den beiden Ländern, in denen seit langer Zeit der Hauptsitz der Mathematik war, bald nach dem Ableben jener Heroen, unter denen Euler strahlt, anfing, sich von dem Euklideischen Systeme der niedern Mathematik mit Entschlossenheit zu entfernen? Das Kopfschütteln und Lächeln, das ernste Abmahnen alter strenger Lehrer war umsonst. Mit Recht erinnerte noch Kästner in seiner gewohnten Weise, die Systeme seien um so schlechter, je weiter sie von Euklides abwichen; dennoch geschah es und mußte geschehen. Es war Uebergang zu einer höheren Stufe, wie kläglich auch der erste Anfang aussah, und wie weit man selbst noch heute von

dem erſehnten Ziele entfernt geblieben iſt. Alle die verſchiedenen Abweichungen von Euklides, die ganze Flut von Lehrbüchern der Elemente, unter denen mehrere bedeutende Leiſtungen ſich finden, ſind nichts Anderes, als ein beſonnenes oder irres, mehr oder weniger glückliches Suchen nach dem natürlichen Syſteme der niederen Mathematik, beſonders der niederen Geometrie, da das ewig bewunderungswürdige künſtliche des Euklides die Geiſter wenn auch fortwährend und mit Recht beſchäftigt, doch nicht mehr befriedigt. Es erging hier ähnlich wie in der Botanik. Die Trefflichkeit des Linnéiſchen Syſtemes vermochte auf die Dauer dem Drange nach wahrhaft naturgemäßer Anordnung und Anſchauung der Pflanzenwelt nicht zu widerſtehen. — Was weiter z. B. die höhere Geometrie betrifft, ſo iſt das Bedürfniß einer kritiſchen Reviſion und vielleicht theilweiſen Umbildung derſelben, wenn auch wegen der verhältnißmäßigen Neuheit der Methode noch nicht durchgängig gefühlt, doch, wie es ſcheint, hier und da wahrgenommen. Die vorliegenden Blätter verſuchen den erſten entſchiedenen Schritt in dieſer Sache zu thun und zeigen die Nothwendigkeit deſſelben im folgenden Paragraphen. — Aehnliche

Verſuche oder Bedürfniße laſſen ſich auch für die übrigen Theile der Mathematik nachweiſen.

Es wurde eben von einem natürlichen Syſteme der Mathematik geſprochen. Ein ſolches Syſtem, der Natur des Geiſtes, ſeiner Thätigkeit und ſeinem Bedürfniße vollkommen gemäß, iſt dasjenige, wonach die höhere Wiſſenſchaftlichkeit ſtrebt. Das Weſen der letzteren aber wurde ſchon oben gelegentlich angedeutet und in eine Geſtaltung der Wiſſenſchaft zu einem Denk-Organismus mit innerlich nothwendiger Gliederung, oder kürzer, in die Nothwendigkeit der Form geſetzt. Der dem letzteren Ausdrucke beigelegte Sinn iſt durch wiederholte Erklärungen gewiß hinlänglich vor Mißverſtändniß geſichert; indeß wird doch eine ausführlichere Bezeichnung des Characters dieſer Stufe des erkennenden Lebens die Realität und Wichtigkeit deſſelben noch mehr hervorheben und die bisher gemachten Betrachtungen in helleres Licht ſetzen.

Mathematiſche Wiſſenſchaftlichkeit im höheren Sinne heiſcht alles das, was die niedere verlangt, mit gleicher Strenge; aber ſie begnügt ſich nicht mit dieſen gemeinen Anſprüchen. Sie ſtellt die Forderung, aus den gehörig erforſchten Principien

und ihren Beziehungen die Wiſſenſchaft ſynthetiſch (und daher in ihren Grundlagen vollſtändig) zu conſtruiren, ſo daß alles Einzelne als Entwickelungsmoment der Idee der Wiſſenſchaft und des behandelten Erkenntnißkreiſes erſcheint, und daher weder eine ganze Methode noch ein beſonderes Verfahren, weder eine ganze Abtheilung noch irgend ein Satz willkührlich aufgegriffen, hingeſtellt und benutzt ſein kann, vielmehr die Bedeutung und Beziehung der Behandlungsarten, der Zuſammenhang der Hauptglieder und aller einzelnen Wahrheiten mit der Grund-Idee, und daher Abhängigkeit und Verwandſchaft ſämmtlicher Maſſen, Theile und Theilchen klar hervortritt, der Gang der Entwickelung und ihr Stoff alſo die äußerſte Durchſchaulichkeit erhält. Nur in ſolcher Klarheit, Harmonie und gegenſeitigen Durchdringung der Beſtandtheile des Wiſſens kann der denkende Geiſt des Menſchen Genüge und Ruhe finden; dann aber genießt der Schüler der Wiſſenſchaft, wie er beſeelt von Verlangen nach Erkenntniß von Stufe zu Stufe ſteigt, eine Freude, deren Hoheit nur bezeichnet wird, indem man ſie das ſchönſte Zeugniß für die Göttlichkeit der Wiſſenſchaft nennt. Zu der weiteren Annäherung an dieſes große Ziel mitzuwir-

ken muß aller Arbeitenden ſchönſtes Streben, aller Strebenden Ruhm und Lohn ſein.

Möchte aber hier und dort behauptet werden, es ſei zu Anſtrengungen, unmittelbar auf dieſen Zweck gerichtet, noch nicht die Zeit da, und man ſehe noch nicht genug Material vor ſich, um an die Ausführung ſo großartiger Pläne im Ernſt denken zu können, ſo muß darauf erwiedert werden, daß der freie Geiſt auf der forſchenden Menſchheit ſich nicht bannen läßt und daß dies ein Glück iſt: denn es darf mit den Verſuchen zu wahrhaft wiſſentſchaftlicher Geſtaltung der Wiſſenſchaft nicht gewartet werden, bis die ungeheuerſte Summe nur äußerlich verbundener Kenntniße aufgehäuft da liegt; ſonſt entflöhe im unendlichen Mühen, in niedriger Gewohnheit der geſtaltende Geiſt und mit ihm das Höchſte und Beſte. Wenn dagegen beide Richtungen der Forſchung, die ſyſtematiſche und die unmittelbar auf Vermehrung des einzelnen Wiſſens ausgehende, alſo die Richtung in die Tiefe, und die in die Breite und Höhe ſich begegnen, ſo arbeiten ſie einander in die Hände, und unterſtützen und fördern ſich wechſelweiſe. Dabei iſt ein noch unerwähnter Vortheil des höheren wiſſenſchaftlichen Standpunktes als höchſt wichtig hervorzuheben.

Je bedeutender das Auge der Wiſſenſchaft ſich erhebt, deſto mehr einzelne Gegenſtände und aus deſto verſchiedneren Geſichtspunkten wird er ſie gewahr, deſto ſicherer und umfaſſender iſt der Blick, deſto mannigfaltiger ſind die durch den nothwendigen Fortſchritt der Entwickelung dargebotenen Beziehungen. Syſtematiſche Entwickelung rechter Art iſt daher eine reiche Fundgrube neuer Entdeckungen, und oft ſolcher, die dem regellos und zufällig wirkenden Erfindungsgeiſte entgehen. Wo dieſe Eigenſchaft ſchöpferiſcher Originalität und Fruchtbarkeit fehlt, fehlt auch der Geiſt höherer Wiſſenſchaflichkeit und ächter Syſtematik, und an ſeine Stelle iſt ein leerer unfruchtbarer Schematismus und Formalismus, ein mattes, von allem ſpeculativen Gehalt entblößtes Schattenſyſtem getreten, das ſich für ächt ausgiebt und dadurch der Wiſſenſchaft großen Schaden zufügt. Nicht nur die tüchtigen practiſchen Köpfe, auch alle bedeutenderen theoretiſchen Geiſter wenden ſich mit Widerwillen ab. Indeß erklärt das häufige Vorkommen dieſes kleinlichen, beſchränkten und zu wenig tief gehenden ſyſtematiſchen Strebens noch nicht hinlänglich die auffallende Erſcheinung, daß gewöhnlich gerade die größeſten mathematiſchen Talente

wenig für die eigentliche Wiſſenſchaft in der Wiſſenſchaft, für die ächt ſyſtematiſche Vollendung derſelben zu wirken geneigt ſind. Die folgenden beiden Bemerkungen nehmen vielleicht dieſer Wahrnehmung ihr Befremdliches. Die erſte: je mehr eigentlich mathematiſche Kraft ein Geiſt hat, deſto mehr müſſen ihn einzelne Probleme der Wiſſenſchaft anziehen; wohin der Blick nur fällt, haftet er ſogleich, dringt ein, und findet reichlichen, intereſſanten Stoff zur Forſchung. Seine Thätigkeit wird gefeſſelt und an einzelnen Unterſuchungen fortgeleitet. Die andere Bemerkung iſt die, daß nicht immer mit großem mathematiſchen Vermögen ſich philoſophiſcher Geiſt verbindet. Dieſer iſt aber Jedem unentbehrlich, der irgend eine eigentliche Wiſſenſchaft, ſie ſei, welche ſie wolle, aus dem Grunde geſtalten, oder auch nur als ein organiſches Ganzes überſehen und in dieſem Sinne vollkommen durchdringen will.

Wenn nun nach allem Geſagten Bedeutung und Unerläßlichkeit des bezeichneten Standpunktes anzuerkennen ſind, ſo verſteht es ſich auch von ſelbſt, daß jeder Beurtheiler des wiſſenſchaftlichen Werthes einer Methode, beſonders wenn ſie, wie die Coordinaten-Methode, die Geſammtentwickelung, oder

das Syſtem eines Haupttheiles der Mathematik begründen und leiten will, ſich auf dieſen Standpunkt ſtellen und mit dieſem Maaßſtabe ſeinen Gegenſtand meſſen muß.

Zweites Kapitel.

Kritik der Coordinaten-Methode.

Beinahe zweihundert Jahre ſind verfloſſen, ſeit Descartes durch ſeine Coordinaten-Methode den Grund zu dem großen Bau der analytiſchen Geometrie legte. Obgleich der Arbeit durch Leibnitz'ens und Newton's nicht genug zu feiernde Entdeckung der höheren Rechnung unerwartete reiche Mittel und Kräfte zugeführt wurden, ſo bedurfte es doch des ganzen erwähnten Zeitabſchnittes, um nur die wichtigſten Maſſen zu geſtalten und einen vollen Begriff von der Kraft der außerordentlichen Methode zu geben, mit der in Fruchtbarkeit und Ausdehnung nur die Differential- und Integral-Rechnung ſelbſt möchte wetteifern können. Aber weit entfernt, ſich auf den Raum zweier Jahrhunderte zu beſchränken, lebt und wirkt dieſe

Methode noch heute fort und ſetzt beſtändig neue Früchte an. Unendlich wie ihre Herrſchaft im Raume wird ihre Wirkung in der Zeit ſein.

Alles deſſen ungeachtet befriedigt ſie das Bedürfniß des Geiſtes und der Wiſſenſchaft nicht vollkommen, es haften ihr Mängel an, die weſentlich genug ſind, um die Fortdauer ihrer Alleinherrſchaft zu brechen. Dieſe Mängel beruhen ſämmtlich auf ihrer Einſeitigkeit, vermöge deren ſie in gewiſſer Beziehung eine relative und zugleich willkührliche Methode iſt, die alſo in dieſer einen und zwar weſentlichen Rückſicht nicht urſprünglich verfährt, daher einen Theil ihrer Gegenſtände nur mittelbar ergreift, und deren nothwendige Folge aus den Principien und der Entfaltung des wiſſenſchaftlichen Organismus ſich nicht nachweiſen läßt, dieſes jedoch ebenfalls nur in gewiſſer Beziehung verſtanden. Dieſe beiden Mängel haben dann weiter zur unabwendbaren Folge gehabt eine künſtliche Eintheilung der Curven und gebogenen Flächen, ein willkührliches und mangelhaftes, aus dem höheren Geſichtspunkte betrachtet, ſehr gebrechliches Lehrgebäude der analytiſchen Geometrie, und uneigentliche Verfahrungsarten bei vielen einzelnen Unterſuchungen. Auf die Gewichtigkeit ſol-

cher Uebelstände hat das vorige Kapitel indirect hingewiesen, und gewiß können nur Befangenheit oder fehlender Sinn für das innerste und tiefste Wesen der Wissenschaft dieselben gering anschlagen. Ich gehe zur Auseinandersetzung der Gründe von denjenigen unter den eben gemachten Behauptungen über, aus denen die übrigen herfließen.

Jede Methode der Geometrie hängt von ihren ursprünglichen Mitteln, ihrem Grundbegriffe ab; der Gebrauch der letztern zur Ableitung der Eigenschaften der Raumgebilde folgt einem Wege, der wenigstens im Allgemeinen durch das Fundament vorherbestimmt ist. Denn die ursprüngliche Form des Gedankenganges muß bei jeder einzelnen Ableitung als Vehikel wiederkehren, sofern man sich desselben nicht etwa durch eine neue Vermittlung wieder entschlägt. Ist also der Grundbegriff, die Auffassung der geometrischen Größen, relativ, so muß es nothwendig die Methode überhaupt sein. Relativ nenne ich einen geometrischen Begriff, wenn er räumliche Bestimmungen (z. B. eine Linie, einen Winkel, eine Ebene, entweder im Allgemeinen oder näher bestimmt ꝛc.) voraussetzt, die außer dem definirten Gebilde vorhanden sind, so daß dieses erst durch Beziehung auf ein Anderes gedacht wird.

Jeder relative geometriſche Begriff wird alſo Beſtandtheile enthalten, die dem definirten Objecte nicht angehören und zu ſeiner Definition nicht unbedingt nothwendig ſind. Es gehören ihm aber nur diejenigen Beſtandtheile an, die das Gebild als unablösliche innere Elemente aufnimmt. Der gewöhnliche Begriff der Kreislinie z. B. iſt ungeachtet ſeiner Einfachheit ein blos relativer, er ſetzt eine räumliche Beſtimmung (einen Punkt) außerhalb der definirten Linie, auf welchen alle Punkte derſelben bezogen werden.

Die Beſtimmung und Behandlung der krummen Linien und krummen Flächen nach der Coordinaten-Methode ſtellt ſich nun ſogleich als eine relative dar. Um bei deſſen näherer Nachweiſung nicht ermüdend weitläuftig zu werden, beziehe ich mich dabei, und im Nachfolgenden überhaupt, nur auf Coordinaten in der Ebene; jeder wird leicht ſelbſt die gezogenen Reſultate auf doppelt gekrümmte Linien und krumme Flächen übertragen.

Wir wählen bei der begrifflichen Bezeichnung der Coordinaten die genetiſche Definition, die Erzeugung durch Bewegung. Die letztere wird dabei bekanntlich als bloße innere Handlung des Vorſtellungsvermögens geſetzt, ihre Geſchwindigkeit bleibt

außer Frage. Wie alle geometrische Begriffe doppelt, nach den Grundbestimmungen des Seins und des Werdens, also entweder als Begriffe des Entstehens oder des Bestehens gegeben werden können, so ist dies auch hier möglich, und es ist an sich gleichgültig, welche von beiden Vorstellungsarten man wählt; die eine kann jedesmal leicht und ohne Weiteres in die andere umgesetzt werden.

Man gebraucht zwei Hauptarten von Coordinaten in der Ebene:

1) Auf einer Geraden (der Abscissenlinie), von einem beliebigen Punkte in ihr aus, bewegt sich eine zweite Gerade (die Ordinaten) unter beliebigem Winkel mit jener und parallel mit sich selbst fort, so, daß sie stets mit demselben Punkte die Abscissenlinie berührt. Sie verändert während dieser Bewegung stetig ihre Länge oder ihre Längen (falls sie in sich mehrere durch Punkte bezeichnete Theile enthielte) nach irgend einem durch eine Function zwischen denselben und der Größe ihres Weges (Abscisse) bestimmten Gesetze. Beide Endpunkte, und, wenn solche vorhanden, die Binnenpunkte der bewegten Geraden beschreiben ein Liniengebild, das, so wie

die Anzahl der beſchreibenden Punkte, durch jene Function gegeben iſt.

Die beiden Geraden, die Coordinaten, ſind außer der definirten Linie gegebene räumliche Beſtimmungen. Die erzeugte Linie erſcheint lediglich als ein Produkt der gegenſeitigen Abhängigkeit ihr äußerlicher Elemente, der Coordinaten. Wie man das Lehrgerüſte aufſtellt, um einen Brückenbogen darüber zu bilden, ſo baut man hier ein ideelles Gerüſte, um die Punkte einer Krummen feſtzulegen. Die Elemente des Begriffes ſind nicht in ſeinen Beſtand ſelbſt aufgenommen, ſie bleiben außerhalb liegen, der Verſtand ſieht ſich daher gleich Anfangs unbefriedigt und die Anſchauung liegt mit dem Begriffe im Streite. Indem nämlich das innere oder äußere Auge den gebildeten Zug verfolgt oder die Hand ihm nachgeht, bleibt das Coordinatenſyſtem von ſelbſt ohne Beachtung, oder, begrifflich ausgedrückt, der Lauf der Linie in Bezug auf ſich ſelbſt folgt ebenfalls einem beſtimmten aber ganz andern Geſetze, als das iſt, nach welchem die Coordinaten ſich ändern. Das Geſetz der Erſcheinung oder Anſchauung der Linie iſt ein anderes, als das ihrer begrifflichen Bildung durch die Coordinaten. Völlige Deutlichkeit erlangt dieſe

Erklärung über die Anwesenheit zweier verschiedenen Gesetze in einer nach dem Coordinatensysteme gebildeten Linie erst weiter unten, im zweiten Abschnitte.

2) Eine Gerade (die Ordinaten) dreht sich in der Ebene um einen ihrer Punkte ohne Ende. Ihre Bewegung hebt von einer gegebenen Lage an und sie verändert dabei stetig ihre Länge oder Längen. Die Abhängigkeit derselben von der Größe der gemachten Drehung (Abscisse) ist durch eine Function (Polargleichung) gegeben. Durch sie ist das Liniengebild bestimmt, das die Endpunkte und etwaigen Binnenpunkte der Geraden zeichnen.

Diese Art von Coordinaten zeigt sich in Rücksicht auf unsere Frage beim ersten Blicke wie die vorher untersuchten, es bedarf keiner weiteren Auseinandersetzung ihrer relativen Natur. Sie erscheinen in Rücksicht auf den gebildeten Zug als bloßer Apparat, und es gilt überhaupt von ihnen, was von jenen gesagt wurde.

Fragt man ferner nach Ableitung und Herkunft dieser Methode selbst, ihrer Beziehung zu den Principien, so fehlt die Antwort. Beide Arten von Coordinaten treten hervor, ohne von ihrem Ursprunge

und deſſen Nothwendigkeit Rechenſchaft zu geben, ſie werden willkührlich aufgegriffen und als willkommene Helfer feſtgehalten. Wie ſie geſchichtlich zufällig entſtanden ſind, ſo ſtehen ſie noch da. Descartes behandelte bekanntlich ein unbeſtimmtes geometriſches Problem analytiſch, und fand als Auflöſung einen krummlinigen Ort. Eine glückliche Verallgemeinerung leitete ihn dabei auf das Verfahren mit parallelen Ordinaten (Nr. 1), wodurch plötzlich die höhere Geometrie zu einem umfangreichen ins Unendliche ſtrebenden Wiſſenſchaftzweige erwuchs. *) Später drang ſich die Schwierigkeit der Anwendung dieſes Verfahrens auf gewiſſe Curvenclaſſen auf, und das Verfahren mit Ordinaten

*) Geometria a Renato Des Cartes op. atq. stud. Franc. a Schooten. Lugd. Batav. 1649. 4. beſonders S. 15 — 17, 25 — 26 und weiter. — Bemerkenswerth iſt, daß, da die Löſung des unbeſtimmten Problems ſelbſt und die Art und Weiſe derſelben das Hauptverdienſt D's. ausmacht — denn die weiteren Schritte fanden ſich leichter — daß, wollte ich bemerken, auf dieſe Weiſe ein enger, wenn auch äußerlicher Zuſammenhang der Geometrie der Alten und Neueren Statt findet. Denn eben dieſes Problem hatte ſich ſchon Archimedes vorgelegt und vergebens zu löſen geſucht. Vermuthlich reizte gerade dieſer Umſtand den kühnen und ſtolzen Geiſt des Carteſius.

aus einem Punkte (Nr. 2) bot ſich als Ergänzung dar.

Darf es bei dieſer in einer weſentlichen Beziehung relativen und willkührlichen Beſchaffenheit der methodiſchen Grundlage der analytiſchen Geometrie befremden, wenn das wiſſenſchaftliche Verfahren in vielem Einzelnen, die Anordnung und der Aufbau des Ganzen an eigenthümlichen Mängeln leidet? Wenn manche an ſich einfache Unterſuchungen zuſammengeſetzt und ſchwierig geworden, über die Rangordnung der krummen Linien und gebogenen Flächen, ihre größere und geringere Einfachheit falſche Begriffe entſtanden, ſelbſt ſehr einfache Curven, ja ganze Claſſen derſelben verborgen geblieben ſind, Weſen und Umfang anderer Geſchlechter mangelhaft aufgefaßt iſt, ꝛc.? — Denn alles dieſes iſt theils bekannt, theils ergiebt es ſich durch die Entwickelung der neuen Methode in den folgenden Abſchnitten.

So wenig das Geſagte abzuläugnen iſt, ſo ſcheinen doch Werth und Bedeutung der Coordinaten-Methode, der im Eingange dieſes Kapitels ein bleibender hoher Rang zugeſchrieben wurde, dadurch unbillig verkleinert zu werden. Und allerdings ſprechen die erlebten ungeheuerſten Erfolge derſelben jedem wegwerfenden Urtheile Hohn. Wo liegt der Punkt,

unter denſelben Bedingungen der Beibehaltung ihrer Länge oder der Veränderung derſelben nach einem beſtimmten Geſetze, ſo entſteht auf die zweite urſprüngliche Weiſe eine geſetzmäßig gebildete Fläche in der Ebene.

Bei beiden Erzeugungsarten können durch die Function in den hervorgebrachten Flächen Binnengrenzen, d. h. jedesmal mehrere verſchiedene zum Theil ſich bedeckende Flächen entſtehen.

Ich führe zuerſt die einfachſten Beiſpiele zu beiden Erzeugungsarten an.

Giebt man der bewegten Geraden eine beſtändige Größe, ſo bilden ſich die beiden ebenen Figuren, die in Rückſicht auf die erzeugte Fläche die einfachſten von allen ſind, die durch fortſchreitende und durch drehende Bewegung entſtehen können: das Parallelogramm und der Kreis. Soll aber die bewegte Gerade nach dem einfachſten Geſetze (Gleichung des erſten Grades) ſich verändern, ſo geſtaltet ſich durch die progreſſive Bewegung die Dreieckfläche (alſo eine noch einfachere Fläche, als die durch die allereinfachſte drehende Bewegung hervorgebrachte), durch die rotirende die Fläche der archimediſchen Spirale, die alſo nach dem Kreiſe die einfachſte

durch drehende Bewegung einer Geraden darſtellbare iſt. Eine dritte durch Fortſchritt erzeugte Fläche, nach dem Parallelogramm und dem Dreiecke die einfachſte dieſer Bildungsart, iſt die Parabel, welche entſteht, indem man die eine Dimenſion (die Erſtreckung in die Breite) nach den Quadratwurzeln der andern Dimenſion (der Längen-Erſtreckung, Abſciſſe) zunehmen läßt. Die Anſchauung der Flächenverbreitung trifft hier mit dem Geſetze ihrer Erzeugung, der Coordinaten-Function, vollkommen zuſammen; die letztere iſt der allgemeine Begriff, unter den ein jedes ſolches Gebild als beſondere Vorſtellung ſich ſtellt. Daſſelbe gilt für alle auf dieſe Weiſe gebildete ebene Figuren, doch immer nur, ſofern man auf die Ausbreitung ihrer Fläche dabei ſieht.

Indem ſo nach der urſprünglichen Erzeugung ebener Flächen die Frage war, und die beiden Grund-Arten dieſer Bildung beſtimmt wurden, ſtellten ſich uns auf überraſchende Weiſe die beiden Coordinaten-Methoden als die einfachſten Flächen-Methoden dar. Denn die flächenbildende Gerade fällt mit dem Begriffe der Ordinate, der Weg, den ſie fortſchreitend oder drehend gemacht hat, mit dem der Abſciſſe zuſammen. Die Coordinaten ſind in

Bezug auf die entſtandene Fläche alſo nicht bloße Mittel, ſondern im eigentlichen Sinne Elemente der Bildung und des Gebildes.

Zu gleicher Zeit verliert die Methode die Willkührlichkeit ihrer Entſtehung, denn ſie entſpringt nothwendig mit der Vorſtellung geſetzmäßiger Flächenbildung und der dazu nöthigen zwei Dimenſionen. Ferner entſtehen die beiden Hauptauffaſſungen der Methode (parallele Ordinaten und Ordinaten aus einem Punkte) aus dem nothwendigen und für die wiſſenſchaftliche Entfaltung der Geometrie überhaupt ſo wichtigen Gegenſatze der zwei verſchiedenen Grund-Arten geometriſcher Größen oder ihrer Erzeugung: der Ausdehnung (Fortſchritt) und des Winkels oder der Lagenverſchiedenheit (Drehung). So zeigt ſich ihr naher Zuſammenhang mit den Grund-Ideen der Geometrie, und überhaupt die wiſſenſchaftliche Würde der Coordinaten-Methode, ohne daß man ſich genöthigt ſähe, ſie erſt aus den bedeutenden Erfolgen abzunehmen, ein Verfahren, aus dem niemals Licht und Einſicht, gewöhnlich aber Staunen und Befangenheit hervorgeht.

Darin nun, daß die Coordinaten-Methode in Beziehung auf die krumme Linie ſelbſt eine relative

und willkührliche, in Beziehung auf die von der Linie begrenzte Fläche aber eine abſolute und nothwendige Methode iſt, liegt der Grund, weshalb die Quadraturen und überhaupt alle Unterſuchungen, die Beziehung auf die umgrenzte Fläche, die Relation ihrer Dimenſionen, Durchmeſſer und Axen, auf characteriſtiſche Punkte innerhalb derſelben (z. B. Brennpunkte) u. ſ. w. haben, nach der Coordinaten-Methode ſo leicht und einfach ausgeführt werden, hingegen die Ableitungen, welche die Curve als bloße Linie betreffen, die Vergleichung der Längen beliebiger Bogen, die Meſſung der Krümmungsgrade, die Betrachtung der Geſtalt und des Laufes der Linie in Bezug auf ſich ſelbſt, beſonders rückſichtlich characteriſtiſcher Punkte in derſelben (z. B. der Wendungspunkte, Rückkehrpunkte ꝛc.), ferner eine umfaſſende, ſtreng begriffliche und doch mit der Anſchauung einſtimmige Eintheilung der Curven, ein natürliches Syſtem der Entwickelung, nach eben dieſer Methode unverhältnißmäßige Schwierigkeiten darbieten.

Iſt durch das Vorhergehende einerſeits das hohe Anſehen, das die Methode ihrer großen Brauchbarkeit wegen genießt und das ſich immer geſteigert hat, auch vor der Kritik gerechtfertigt, ſo iſt

zugleich andererſeits ihre Einſeitigkeit an den Tag gelegt. Indem ſie vermöge derſelben die Curve ſelbſt und eben ſo die krumme Fläche an ſich (nicht den von ihr begrenzten Körperraum) nur mittelbar beherrſcht, drängt ſich die Frage hervor: welche iſt für die Curve als Linie und die gebogene Fläche als ſolche die abſolute und daher in dieſem Sinne vollkommen entſprechende Methode? Die Beantwortung dieſer Frage giebt der zweite Abſchnitt durch Enthüllung der neuen Methode. Dieſe leiſtet das für die Curve, was die Coordinaten-Methode für die von ihr umgränzte ebene Fläche thut, und wird künftig für die doppelt gekrümmten Linien und krummen Flächen daſſelbe Geſchäft übernehmen, das der Coordinaten-Methode für die Körperräume zu führen bleibt. Beide Methoden ſind, iſolirt genommen, gleich einſeitig, daher einander nothwendige gegenſeitige Ergänzungen und von gleichem wiſſenſchaftlichen Werthe. Soll aber eine von ihnen die Grund-Methode ſein, ſo iſt es mehr als zweifelhaft, ob die Coordinaten-Methode dieſen Rang wird behaupten können. Denn die Curve an ſich iſt ihrem Weſen nach vor der Fläche, man kann die Linie bilden, ohne dabei auf die Natur der mit entſtehenden Fläche zu merken und überhaupt, ohne die

Idee einer geſetzmäßig begrenzten Fläche und ihrer Erzeugung ſchon entwickelt zu haben; kurz, die Linie iſt elementarer als die Fläche, ſie hat nur eine Dimenſion. Aehnliches gilt von den doppelt gekrümmten Curven und den krummen Flächen; man kann die letzteren früher und beſſer ohne Hülfe des Geſetzes betrachten, nach dem die Körperräume entſtehen, deren Grenzen ſie ſind.

Was aber die Anwendung betrifft, ſo wird für die aſtronomiſchen, phyſikaliſchen und optiſchen Wiſſenſchaften die Coordinaten-Methode wahrſcheinlich immer eine überwiegende Bedeutung behalten, da ſie wohl auf die Mehrzahl der wichtigſten Fragen dieſer Wiſſenſchaften leichter und ungezwungener anwendbar iſt, als die urſprüngliche Methode. Schon die Auffaſſung der krummen Linien in der Natur erfolgt gewöhnlich relativ, in den optiſchen Wiſſenſchaften z. B. der durch Vorüberſtralungen des Lichtes an Curven entſtehenden neuen Curven (Projection), der durch Spiegelung erzeugten krummen Linien, u. ſ. w. Doch werden auch wieder viele Unterſuchungen der angewandten Mathematik ſich finden, die künftig einfacher und leichter durch die jüngere Schweſter der Coordinaten-Methode, als bisher durch ſie ſelbſt, auszuführen ſind.

zugleich andererseits ihre Einseitigkeit an den Tag gelegt. Indem sie vermöge derselben die Curve selbst und eben so die krumme Fläche an sich (nicht den von ihr begrenzten Körperraum) nur mittelbar beherrscht, drängt sich die Frage hervor: welche ist für die Curve als Linie und die gebogene Fläche als solche die absolute und daher in diesem Sinne vollkommen entsprechende Methode? Die Beantwortung dieser Frage giebt der zweite Abschnitt durch Enthüllung der neuen Methode. Diese leistet das für die Curve, was die Coordinaten-Methode für die von ihr umgränzte ebene Fläche thut, und wird künftig für die doppelt gekrümmten Linien und krummen Flächen dasselbe Geschäft übernehmen, das der Coordinaten-Methode für die Körperräume zu führen bleibt. Beide Methoden sind, isolirt genommen, gleich einseitig, daher einander nothwendige gegenseitige Ergänzungen und von gleichem wissenschaftlichen Werthe. Soll aber eine von ihnen die Grund-Methode sein, so ist es mehr als zweifelhaft, ob die Coordinaten-Methode diesen Rang wird behaupten können. Denn die Curve an sich ist ihrem Wesen nach vor der Fläche, man kann die Linie bilden, ohne dabei auf die Natur der mit entstehenden Fläche zu merken und überhaupt, ohne die

Idee einer geſetzmäßig begrenzten Fläche und ihrer Erzeugung ſchon entwickelt zu haben; kurz, die Linie iſt elementarer als die Fläche, ſie hat nur eine Dimenſion. Aehnliches gilt von den doppelt gebogenen Curven und den krummen Flächen; man kann die letzteren früher und beſſer ohne Hülfe des Geſetzes betrachten, nach dem die Körperräume entſtehen, deren Grenzen ſie ſind.

Was aber die Anwendung betrifft, ſo wird für die aſtronomiſchen, phyſikaliſchen und optiſchen Wiſſenſchaften die Coordinaten-Methode wahrſcheinlich immer eine überwiegende Bedeutung behalten, da ſie wohl auf die Mehrzahl der wichtigſten Fragen dieſer Wiſſenſchaften leichter und ungezwungener anwendbar iſt, als die urſprüngliche Methode. Schon die Auffaſſung der krummen Linien in der Natur erfolgt gewöhnlich relativ, in den optiſchen Wiſſenſchaften z. B. der durch Vorüberſtralungen des Lichtes an Curven entſtehenden neuen Curven (Projection), der durch Spiegelung erzeugten krummen Linien, u. ſ. w. Doch werden auch wieder viele Unterſuchungen der angewandten Mathematik ſich finden, die künftig einfacher und leichter durch die jüngere Schweſter der Coordinaten-Methode, als bisher durch ſie ſelbſt, auszuführen ſind.

Die gerade Linie und der ebene Winkel sind daher die Urbestandtheile der Geometrie, oder, was dasselbe sagt, alle Bildungen der Geometrie geschehen durch die beiden ursprünglichen Arten der Bewegung, die fortschreitende und die drehende.

§. 3.

Will man die gerade Linie von der krummen unterscheiden, so bezeichnet man sie als eine Linie mit unveränderlicher Richtung. Es ist aber nicht die krumme Linie allein der geraden entgegenzusezzen, sondern die gebrochene mit ihr, so daß, indem gebrochene und krumme Linie zusammen der geraden entgegenstehen, sie wieder unter sich einen untergeordneten doch sehr wichtigen Gegensatz bilden.

1.) Diejenige absolute Bestimmung im Raume, welche alle Ausdehnung ausschließt, also die letzte räumliche Grenze und daher ein bloßer, an sich völlig bestimmter, wo auch immer gedachter Ort im Raume wird Punkt genannt.

2.) Die Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes.

3.) Verändert der Punkt bei der Bewegung seine Richtung nicht, so entsteht die gerade Linie.

4.) Aendert er hingegen seine Richtung während der Bewegung, so entsteht entweder die gebrochene oder die krumme Linie. Die erstere, wenn die Richtungsveränderung nur an einzelnen Punkten (discret), die letztere, wenn sie an allen Punkten (continuirlich) geschieht. Die einfachsten Gebilde der ersteren Art sind die geradlinigen Figuren der niederen Geometrie, die einfachsten der letzteren Art die ebenen Curven der höhern Geometrie. Bei der gebrochenen Linie fallen die beiden Elemente, Fortschritt und Richtungsveränderung oder Drehung, auseinander: während des Fortschrittes ist keine Drehung, während der Drehung kein Fortschritt; bei der krummen Linie dagegen sind progressive und rotirende Bewegung ununterbrochen vereinigt: indem man fortschreitet, dreht man sich. Nicht der geringste Fortschritt geschieht ohne Richtungsveränderung, nicht die geringste Richtungsveränderung ohne Fortschritt. Die erste Linie ist eine bloße Zusammensetzung (mechanische Verbindung) der beiden Grundbestandtheile; die letztere Linie eine stetige Vereinigung derselben, so daß sie beide, das Element der Ausdehnung oder die gerade Linie und das Ele-

Die gerade Linie und der ebene Winkel sind daher die Urbestandtheile der Geometrie, oder, was dasselbe sagt, alle Bildungen der Geometrie geschehen durch die beiden ursprünglichen Arten der Bewegung, die fortschreitende und die drehende.

§. 3.

Will man die gerade Linie von der krummen unterscheiden, so bezeichnet man sie als eine Linie mit unveränderlicher Richtung. Es ist aber nicht die krumme Linie allein der geraden entgegenzusezzen, sondern die gebrochene mit ihr, so daß, indem gebrochene und krumme Linie zusammen der geraden entgegenstehen, sie wieder unter sich einen untergeordneten doch sehr wichtigen Gegensatz bilden.

1.) Diejenige absolute Bestimmung im Raume, welche alle Ausdehnung ausschließt, also die letzte räumliche Grenze und daher ein bloßer, an sich völlig bestimmter, wo auch immer gedachter Ort im Raume wird Punkt genannt.

2.) Die Linie entsteht durch Bewegung eines Punktes.

3.) Verändert der Punkt bei der Bewegung seine Richtung nicht, so entsteht die gerade Linie.

4.) Aendert er hingegen seine Richtung während der Bewegung, so entsteht entweder die gebrochene oder die krumme Linie. Die erstere, wenn die Richtungsveränderung nur an einzelnen Punkten (discret), die letztere, wenn sie an allen Punkten (continuirlich) geschieht. Die einfachsten Gebilde der ersteren Art sind die geradlinigen Figuren der niederen Geometrie, die einfachsten der letzteren Art die ebenen Curven der höhern Geometrie. Bei der gebrochenen Linie fallen die beiden Elemente, Fortschritt und Richtungsveränderung oder Drehung, auseinander: während des Fortschrittes ist keine Drehung, während der Drehung kein Fortschritt; bei der krummen Linie dagegen sind progressive und rotirende Bewegung ununterbrochen vereinigt: indem man fortschreitet, dreht man sich. Nicht der geringste Fortschritt geschieht ohne Richtungsveränderung, nicht die geringste Richtungsveränderung ohne Fortschritt. Die erste Linie ist eine bloße Zusammensetzung (mechanische Verbindung) der beiden Grundbestandtheile; die letztere Linie eine stetige Vereinigung derselben, so daß sie beide, das Element der Ausdehnung oder die gerade Linie und das Ele-

ſtatt in einzelne Stückchen zu zerfallen iſt ſie fließend geworden.

Der vorige §. gab die ſtreng begriffliche Vorſtellung der Curve; der jetzige ſelbſt bietet nur eine unterſtützende anſchauliche dar, indem er die Curve als die Grenze bezeichnet, der ſich eine Gebrochene unter den angegebenen Bedingungen in's Unendliche nähert.

§. 5.

Die Bedingung der Curve iſt nach Obigem, daß die fortſchreitende Linie in ſteter Wendung begriffen ſei. Iſt die Wendung die einfache, d. h. geſchieht ſie in einer Ebene, ſo hat man die ebene Curve. Dieſe hat daher an je zwei verſchiedenen Punkten, ſie mögen einander noch ſo nahe liegen, verſchiedene Richtung, es ſei denn, daß die Linie zwiſchen dieſen Punkten genau eine ganze Umdrehung oder ein Vielfaches derſelben gemacht habe. Vollführte ſie aber ſtatt deſſen eine halbe Umdrehung oder ein ungerades Vielfaches derſelben, ſo iſt ſie an den zwei Grenzpunkten dieſes Bogens nicht in gleicher, ſondern in gerade entgegengeſetzter Richtung.

Man bezeichnet die Richtung, die die Curve an irgend einem Punkte hat, durch eine von dieſem

aus in derſelben Richtung gezogene Gerade. Im Anfange, im Punkte a, hat die Curve Fig. 1 die Richtung ab, geht dann allmählig in die Richtung cd, darauf in ef u. ſ. w. über. Eine Reihe ſolcher Richtungslinien (Tangenten im weiteren Sinne) gewährt eine anſchauliche Vorſtellung der allmähligen Drehung der Curve. Der ebene Winkel (z. B. m), den zwei Richtungslinien (z. B. gh, kl) mit einander bilden, faßt immer die von der krummen Linie zwiſchen den Punkten (z. B g und k), an denen die Tangenten liegen, ſtetig gemachte Drehung in eine Summe zuſammen. Denn um z. B. aus der Richtung, welche die Curve in g hat, in die ihr in k eigene Richtung ſich zu verſetzen, muß man nach und nach aus der Lage gh in die Lage ml übergehen, alſo nach und nach den ∠m durch Drehung beſchreiben.

§. 6.

Der ſtetige Fortſchritt im Verein mit der ſtetigen Richtungsveränderung macht zwar das Weſen der krummen Linie aus, aber in dieſer Allgemeinheit aufgefaßt iſt ſie noch kein Gegenſtand theoretiſch-mathematiſcher Betrachtung. Zufällige oder willkührliche oder doch ſolche Linien, mit deren et-

wa zufällig Statt findendem Bildungsgeſetze man nicht bekannt iſt, z. B. Umriſſe ferner Gewölke, die hier und da ausweichenden Windungen eines Fußpfades, ein auf das Papier gemalter Kritzkratz ſind krumme Linien, mit denen die theoretiſche Wiſſenſchaft als ſolche nimmer etwas zu ſchaffen haben kann. Nur wo Einheit in der Mannigfaltigkeit und dadurch ſtrenger Zuſammenhang, d. h. wo ein vom Verſtande gegebenes oder aufgefundenes Geſetz herrſcht oder doch wenigſtens ein Complex einzelner dem Geiſte bewußter Beſtimmungen ſich findet, iſt die Werkſtatt der Wiſſenſchaft. Da nun die beiden einzigen Elemente der Curve Fortſchritt und Drehung ſind, ſo muß alſo unter ihnen ein beſtimmter Größen-Zuſammenhang Statt finden, der, da zugleich beide ſtetig ſind, jedesmal für den ganzen Zug, d. h. für alle einzelne Punkte der Linie derſelbe bleibt. Nur dann ſind alle ihre Theile zu einem harmoniſchen Ganzen vereint, die Größe der Richtungsveränderung iſt durch die Größe des Fortſchrittes gebunden oder umgekehrt; es iſt die Willkühr gehoben, womit ſich die Richtung ſtark oder ſchwach verändern könnte, der Fortſchritt möchte dabei hier oder dort ſo groß oder ſo klein ſein, als er wollte. Da nun der Fortſchritt von irgend ei-

nem Punkte (er mag Anfangspunkt heißen), die Drehung von irgend einer ersten Richtung (Anfangsrichtung) anheben muß, und von da an gerechnet die Größe beider in steter Wandlung begriffen ist, so haben wir es bei der ebenen Curve offenbar mit zwei von einander gesetzmäßig abhängigen veränderlichen Größen zu thun, mit dem Fortschritte oder der Bogenlänge und der Drehung oder dem Winkel, die mit gemeinschaftlichem Namen Elemente oder Bestandtheile der Curve heißen mögen.

Damit eine bestimmte Krumme entstehe, muß also ein bestimmtes Zahlengesetz die Abhängigkeit angeben, worin für den ganzen Lauf der Curve die stets vom Anfangspunkte an gerechnete Größe des Fortschrittes von der dazu gehörigen stets vom der Anfangsrichtung an gerechneten Größe der Richtungsveränderung oder umgekehrt steht; denn die Größen vergleichen sich unter einander durch Zahlen, und alle mögliche Abhängigkeiten von Größen fallen mit allen möglichen Abhängigkeiten der Zahlen zusammen. Es versteht sich dabei von selbst, daß sowohl die Zahlen, welche die Drehungsgrößen, als diejenigen, welche die Längen ausdrücken, als unbenannte gedacht werden, da beide Reihen

von Zahlen ſich auf zwei verſchiedene Einheiten beziehen, von denen jede eine abſolute Größe von beſonderer Art bezeichnet, die erſte irgend eine, für jede Curve beliebig anzunehmende abſolute Länge, die zweite eine dergleichen Winkel- oder Drehungsgröße, z. B. $\frac{3}{4}$ Rechte, 2 Rechte, 9 Rechte, überhaupt irgend einen beliebigen Theil oder ein Vielfaches der ganzen Umdrehung.

Iſt z. B. acegk (Fig. 1) eine geſetzmäßige Krumme, ſo wird die der Länge ac entſprechende Zahl in derſelben Abhängigkeit von der dem Richtungsunterſchiede zwiſchen ab und cd entſprechenden Zahl ſtehen, worin die Zahl für den Bogen ae von der Zahl für den Richtungsunterſchied zwiſchen ab und ef ſteht, worin ferner die Zahl für den Bogen ag von der Zahl für den Richtungsunterſchied zwiſchen ab und gh ſteht, u. ſ. w.

§. 7.

Benennt man nun allgemein den veränderlichen Fortſchritt oder die wandelbare immer zunächſt von einem und demſelben Anfangspunkte an gerechnete Länge einer Linie mit dem gewöhnlichen Zeichen für die Ausdehnung eines Bogens, s, die wandelbare Größe der Richtungsveränderung oder die während des Fortſchrit-

tes s, alſo von der Anfangsrichtung an gemachte Drehung mit w (Winkel, Wendung), und bezeichnen f und φ jede beliebige Function, ſo iſt der allgemeinſte Ausdruck für alle ebene Curven

$$w = f(s) \text{ oder } s = \varphi(w).$$

Wäre z. B. die beſondere Function

$$w^2 = s$$

gegeben, ſo hätte man

für die Drehung	$\frac{1}{10}$	die Länge	$\frac{1}{100}$		
= = =	$\frac{1}{2}$	= =	$\frac{1}{4}$		
= = =	1	= =	1		
= = =	2	= =	4		
= = =	10	= =	100		

Hätte dabei die Einheit für s z. B. die abſolute Länge von 4 (Zoll), die Einheit für w die eines rechten Winkels, ſo entſtände

für die Drehung von	9°	die Länge	0,″04		
= = = =	45°	= =	1″		
= = = =	90°	= =	4″		
= = = =	180°	= =	16″		
= = = =	900°	= =	400″	ꝛc.,	

und wie hier für die 5 beſtimmten Punkte jeder Drehung ihre beſtimmte Länge vermöge des Geſetzes zukommt, ſo folgt aus dem letzteren für alle

übrige Curvenpunkte eine ähnliche Bestimmung: für jede willkührlich angenommene Drehung erhält die Länge ihr bestimmtes Maaß. Oder es erhält umgekehrt, wenn in der Function s als willkührlich veränderlich, w als abhängig veränderlich gesetzt, und sie daher durch $\pm\sqrt{s} = w$ ausgedrückt wird, für jede willkührlich angenommene Länge jede dazu gehörige Drehung ihre bestimmte Größe, oder eine Mehrheit derselben, hier zwei.

§. 8.

Sollen daher alle mögliche Curven vorgestellt oder gedacht werden, so muß man alle mögliche Functionen unter zwei veränderlichen Größen aufstellen; die Eintheilung und das System von diesen wird auch Eintheilung und System der Curven bestimmen; der einfachsten Function wird die einfachste Linie entsprechen u. s. w. Dieses System der natürlichen Verwandtschaft der Curven aufzustellen ist eine schwierige Aufgabe, deren Lösung wichtig ist. Andeutungen darüber folgen im dritten Abschnitte, da der gebräuchliche oberste Eintheilungsgrund, die Classification der algebraischen Functionen und Curven nach ihren Graden, offenbar nur die Geltung eines Unter-Eintheilungsgrundes haben sollte.

§. 9.

Bei der bisherigen Darstellung dieses Kapitels bin ich sehr ausführlich zu Werke gegangen. Einerseits lag mir an der höchsten Klarheit an sich, und selbst an der Verständlichkeit für Leser, die kaum die Schwelle der höheren Mathematik überschritten haben, andererseits war es mir darum zu thun, nicht nur die Leichtigkeit und Ungezwungenheit der Grundgedanken dieser Methode, sondern auch deren Ursprünglichkeit, ihre nächste und nothwendige Folge aus den Grundbegriffen der Wissenschaft zu zeigen. Zu gleicher Zeit sollte der Beweis geliefert werden, daß in der höheren Geometrie die analytische Methode überhaupt die wahrhaft und im höheren Sinne wissenschaftliche ist; indem nachgewiesen wurde, wie sie als analytische für die Curve als Linie unmittelbar und mit Nothwendigkeit aus den Principien hervorgeht. Denn für die krummlinig begrenzte ebene Fläche (Coordinaten-Methode) gilt durch Beziehung der letzten Hälfte des zweiten Kapitels der Einleitung auf diese Nachweisung ganz dasselbe Ergebniß. Darin eben liegt die Grundverschiedenheit der analytischen Methode von der syn-

thetiſchen, daß die erſtere vom eigentlichen Begriffe des Objectes ſelbſt, die letztere aber von einem uneigentlichen Begriffe, nämlich von irgend einer (bequem gewählten, ohne weſentliche Hülfe analytiſcher Formen zu beſtimmenden) Eigenſchaft des Objectes ausgeht und daraus andere Eigenſchaften, auch den eigentlichen Begriff folgert. In der Art, wie dieſes geſchieht, beſteht die zweite weſentliche Verſchiedenheit. — Bisher hatte ſich die Parthei der Analytiker nur auf die Kraft ihrer Methode und deren Erfolge berufen; indeß läßt ſich nur aus dem hier genommenen Standpunkte der langwierige neuerdings in England zwiſchen Leslie *) und Lardner **) in helle Flammen ausgebrochene Streit der ſynthetiſchen und analytiſchen Methode gründlich und für immer entſcheiden. Das Verhältniß beider Methoden ausführlich zu beleuchten behalte ich mir für einen anderen Ort vor. Ohne den hohen ſubjectiven Werth der ſynthetiſchen Methode zu läugnen zeigt

*) Geometrical Analysis and Geometry of curve lines. By John Leslie, Professor etc. in the University of Edinburgh. Edinburgh 1821. Vorrede S. I u. VIII.

**) A treatise on algebraic Geometry. By Dionysius Lardner, Professor etc. in the University of London. London 1831. Vorrede S. XL ff.

dieſe Beleuchtung, daß ſich die höhere Geometrie da, wo es auf weitere Entwickelung und höhere Vollendung der Wiſſenſchaft ankommt, einzig und allein in den Entwickelungsformen der analytiſchen Methoden fortzubewegen und weiter auszubilden hat.

§. 10.

Iſt nun irgend eine Gleichung zwiſchen den beiden in Rede ſtehenden veränderlichen Größen gegeben und gelöſ't, ſo muß man die Werthe für s und w in's Geometriſche überſetzen, d. h. ihnen die entſprechende räumliche Deutung geben. Was in dieſer Beziehung die Größe der Werthe anlangt, ſo verſteht ſich darüber nach dem Geſagten alles von ſelbſt; nur die räumliche Bedeutung der Vorzeichen iſt noch in Betrachtung zu ziehen; es muß die allgemeine mathematiſche Beziehung der Entgegenſetzung auf die räumlichen Größen der Drehung und Länge übertragen werden.

Zu dieſem Zwecke verſetze man ſich in irgend einen Punkt (a, Fig. 2) der Ebene, der der Anfangspunkt ſei, und von ihm aus in irgend eine Richtung (ab), die Anfangsrichtung. Im Fortſchritte kann man ſich nun nach der einen oder der

andern Seite von ab, alſo nach ad oder nach af drehen, ſo daß ag oder ah die entſprechenden Curven-Anfänge wären. (Der Deutlichkeit wegen ſind kleine gerade ſtatt der krummen Linien abgebildet.) Dieſe beiden Drehungen ſind einander entgegengeſetzt; denn eine nach der einen Seite gemachte wird durch eine eben ſo große nach der andern Seite wieder aufgehoben: ihre Größen ſind alſo auch entgegengeſetzte Größen und mit verſchiedenen Vorzeichen zu verſehen. Die Drehung nach rechts ſei die poſitive, die nach links die negative. Die Curve ahkm hätte ſich alſo zuerſt um den negativen Winkel bah, dann, da die fernere Drehung nach derſelben Seite geht, von neuem um den negativen Winkel fhk gedreht, zuſammen alſo für den Fortſchritt ahk die Drehung $-(bah+fhk)$ gemacht. Vom Punkte k aus aber fängt ſie an ſich entgegengeſetzt, alſo poſitiv, zu wenden, und zwar für den Fortſchritt km um den Winkel nkm; für die ganze Länge ahkm beträgt alſo ihre Wendung $-bah-fhk+nkm$. Ein Punkt, wie k, wo die Drehung einer Krummen anfängt nach der entgegengeſetzten Seite zu geſchehen, heißt ein Wendungspunkt, und an einem ſolchen findet ſtets ein Maximum der bisherigen poſitiven oder negati-

ven und daher ein Minimum (der Anfang) der negativen oder positiven Drehung Statt.

§. 11.

Was nun ferner die Länge oder den Fortschritt betrifft, so ist er in unserm Beispiele in Beziehung auf den Anfangspunkt a sowohl für die positive als für die negative Drehung nach derselben Richtung, nämlich nach b hin erfolgt. Man kann ihn aber auch von a aus nach der entgegengesetzten, nach c hin, nehmen, z. B. während der anfangenden Drehung den Fortschritt ap oder aq machen. Die letzteren beiden Fortschritte nun sind den ersteren beiden (ag, ah) entgegengesetzt, da sie ursprünglich von demselben Punkte (a) aus nach einer gerade entgegengesetzten Richtung gedacht werden. Entgegengesetzt ist diese Richtung der Fortschritte aber, weil der eine den andern von gleicher Größe aufhebt. Die Größenwerthe entgegengesetzter Fortschritte erhalten also auch verschiedene Vorzeichen; der nach oben oder bei anderer Lage nach rechts mag der positive, der nach unten oder nach links der negative heißen. ab, ahkm sind also positive, ap, aq negative Fortschritte.

§. 12.

Es muß noch einer möglichen Verwechſelung vorgebeugt werden, nach welcher man in Bezug auf den negativen Fortſchritt die Drehung nach der Seite ar für poſitiv, die nach der Seite at für negativ anſprechen könnte. Denn geht gleich die erſtere nach rechts, die letztere nach links herum, wenn man ſich in c und nach a gerichtet denkt, ſo iſt es doch umgekehrt, ſobald man, wie es geſchehen muß, ſich in den Punkt verſetzt, von welchem aus die Drehung geſchieht, nämlich in a, und ſich dabei nach c kehrt. Nun iſt von ac nach ar die Drehung links herum, alſo negativ, von ac nach at rechts herum oder poſitiv. Die Vorſtellung, immer in Beziehung auf einen ſchon geſetzten beliebigen Punkt und eine ſchon geſetzte beliebige Richtung (hier Anfangspunkt, Anfangsrichtung) gedacht, wird am ſicherſten, wenn man zugleich die entgegengeſetzte Richtung, z. B. in Rückſicht auf ab die ganze Linie bac in Drehung denkt. Indem ſich nun ba nach da dreht, erhält zugleich ac die veränderte Lage pt. Beide Drehungen gehen nach derſelben Seite, hier nach rechts, ſind alſo einſtimmig und daher mit gleichen, hier mit poſitiven Vorzeichen zu verſehen.

Auf den Punkt a, die Richtung ab bezogen sind also die Curventheilchen

$$ag = +w, +s,$$
$$ah = -w, +s,$$
$$ap = +w, -s,$$
$$aq = -w, -s.$$

§. 13.

Schon §. 10 ist gelegentlich der Fall erörtert, wenn die Drehung im schon begonnen Laufe der Linie eine der bisherigen entgegengesetzte wird; dasselbe ist noch in Beziehung auf den Fortschritt zu thun. Wenn dieser bei fortgehender Drehung wieder abnimmt, z. B. für eine gewisse Drehung (Fig. 5) ac war, welches 8 sei, nun aber für eine größere Drehung wieder kleiner wird, z. B. nur noch 5 beträgt, so kann er von dem Punkte der Abnahme (von c) an nicht mehr in der vorigen Richtung (cd) fortgehen, sondern muß in der entgegengesetzten (ce) genommen werden. Behält dabei die Drehung ihren unentgegengesetzten Fortgang, so drehen sich die Richtungslinien nach derselben Seite wie vorher, hier, wo man von c nach e gekehrt ist, rechts. Es rotirt also dce bei der Bildung der Curve nach derselben Seite, wie vorher ab, so

daß man ſich beim Fortſchreiten von c nach e in einer Linie wie cf fortbewegt, und das neue Curvenſtück dem vorigen nothwendig die erhobene Seite zuwendet. An einem ſolchen Uebergangspunkte des Fortſchrittes in den entgegengeſetzten bei unentgegengeſetzter Fortdrehung iſt alſo eine ſogenannte Spitze (cuspis). Würde cf=3 geſetzt, ſo betrüge die ganze Linie acf alſo +8—3=5. Die abſolute Länge der acf iſt freilich 11; durch die entgegenſetzende Beziehung aber der Richtungen des Fortſchrittes vermindert ſie ſich bis auf 5. Und ſo in ähnlichen Fällen.

§. 14.

Wenn in einem und demſelben Curvenpunkte beide Beſtandtheile, Fortſchritt und Drehung, entgegengeſetzt werden, ſo entſteht ein Schnabel (bec d'oiseau), Punkt c, Fig. 6. Denn da der bisherige Fortſchritt in der Richtung acd läuft, ſo wird er vom Punkte der Entgegenſetzung c an in in der Richtung ce gehen müſſen, und da die bisherige Drehung rechts herum erfolgte, ſo wird ſie nun nach links geſchehen, alſo die Richtungslinie ce ſich nach der Seite, wo f ſteht, drehen. Dadurch bildet ſich eine Fortſetzung der Curve wie cf. Das

eine Curvenſtück kehrt dem andern die erhobene, dieſes jenem die hohle Seite zu, wie es weiter unten näher gezeigt wird.

Der Leſer kann ſchon hier vorausſehen, wie viel leichter es nach dieſer als nach der Coordinaten-Methode iſt, die Anweſenheit und den Ort ſolcher characteriſtiſchen Punkte einer Curve aus der Function nachzuweiſen.

Zweites Kapitel.

Entwickelung des urſprünglichen Begriffes der doppelt gekrümmten Linie und der gebogenen Fläche.

§. 15.

Es bleibt noch übrig, die gleichmäßige Anwendbarkeit der Methode zunächſt als einer begriffbeſtimmenden (worauf alles ankommt) auf doppelt gekrümmte Linien und gebogene Flächen wenigſtens im Allgemeinen nachzuweiſen; denn im Beſonderen beſchränken wir uns auf ebene Curven, da auf dieſem einen unermeßlichen Felde doch wenige Schritte gethan werden ſollen, um das Weſen der Methode nach einigen

Hauptbeziehungen darzuſtellen und künftigen Mitarbeitern den Zugang zu öffnen. Es wird dann weniger ſchwer fallen, auch jene beiden Gebiete, die noch ſchneller, als das erſte, nach allen Seiten einen ungeheueren Umfang gewinnen, mit Glück zu betreten.

§. 16.

Von den Elementen, von denen der Lauf einer doppelt gekrümmten Linie abhängt, erhält man am leichteſten eine klare Vorſtellung, wenn man ſich ſtatt der doppelt gekrümmten zuerſt eine doppelt gebrochene, d. h. eine aus Geraden, von denen nie je drei zuſammenſtoßende in derſelben Ebene liegen, zuſammengeſetzte Linie denkt. Man darf dann hinterher nur die Zahl der Winkel, welche die einzelnen Geraden verbinden, immer mehr ſteigern, ohne die Summe ihrer Größe zu ändern, und die Winkel zuletzt längs der Linie fließend werden laſſen, um die Vorſtellung der doppelt gekrümmten Linie zu erhalten.

Es ſei eine doppelt gebrochene Linie gegeben. Die erſte und zweite Gerade, aus denen ſie zuſammengeſetzt iſt, liegen alſo in einer andern Ebene, als die zweite und dritte. Um z. B. die Lage dieſer letzteren gegen einander völlig zu beſtimmen,

bedarf es ſowohl des ebenen Winkels, den ſie in der ihnen gemeinſchaftlichen Ebene bilden, als auch des Neigungswinkels, den dieſe Ebene mit derjenigen macht, in welcher die erſte und zweite Gerade liegen.

Man kann indeß ſtatt dieſer beiden beſtimmenden Winkel zwei andere wählen; wo denn aber auch die Ebenen andere, und zwar ſenkrecht auf einander ſtoßende werden.

In der doppelt gebrochenen Linie grenzen immer zunächſt zwei Gerade an einander. Man denke ſich eine beliebige Ebene durch eine von ihnen gelegt, die die folgende nicht mit in ſich aufnimmt, ſo ſoll ſich an den Endpunkt der erſten eine zweite Gerade fügen, die nicht in dieſer Ebene liegt. Um die Lage dieſer zweiten Geraden, die man ſich ſchon willkührlich gelegt denke, gegen die erſte auf eine einfache Weiſe zu beſtimmen, legt man durch ſie von allen möglichen Ebenen, welche durch ſie gelegt werden können, diejenige, welche ſenkrecht auf der erſten Ebene ſteht. In irgend eine und zwar eine einzige ſolche ſenkrechte Ebene muß ſie nach einem elementar-ſtereometriſchen Satze fallen. Dieſer ſenkrechten Ebene Stellung auf der erſten oder der Grundebene iſt durch einen ebenen Winkel in

der letzteren, zwiſchen der erſten Geraden als dem einen Schenkel, und der Schneidungslinie beider Ebenen als dem andern Schenkel beſtimmt, und es bedarf nur noch außerdem der Angabe eines zweiten in der ſenkrechten Ebene liegenden ebenen Winkels, nämlich desjenigen zwiſchen der zweiten Geraden als dem einen Schenkel und der Schneidungslinie beider Ebenen als dem andern Schenkel, um die Lage der zweiten Geraden gegen die erſte völlig fixirt zu haben.

Zwei ebene Winkel alſo ſind es, durch welche dieſes geſchieht, und wir dürfen ſie nur als veränderlich denken, um jede mögliche Lage beider Linien gegen einander hervorzubringen. Folglich hängt der Lauf einer doppelt gekrümmten Linie von der Relation zwiſchen dieſen zwei veränderlichen ebenen Winkeln und der Länge der Linie ab. Man hat demnach dem s und w nur ein drittes Zeichen, etwa u, für einen zweiten veränderlichen Winkel, der am beſten der Erhebungswinkel heißt, hinzuzufügen. Da nicht zwei der Veränderlichen die dritte beſtimmen, ſondern von einer die beiden andern abhängen, ſo wird der Begriff einer doppelt gekrümmten Linie nicht durch eine Gleichung unter den drei Veränderlichen, ſondern jederzeit durch zwei zuſam-

mengehörige Gleichungen, eine unter s und w, und eine unter w und u oder s und u gegeben.

Ein einfaches Beiſpiel diene zur Veranſchaulichung. Der ∠u ſei conſtant; wäre es auch der ∠w, ſo würde die Linie eine aus der Ebene ſich erhebende Gerade ſein. Aber dieſer ſei durch die Function auf ſolche Art abhängig von s, daß ohne das Hinzukommen des u ein Kreis in der Ebene entſtände. Nun muß ſich die Linie im Aufſteigen unter ſtets gleichem Winkel zugleich kreisförmig winden; es entſteht daher die einfachſte der um den Cylinder gewundenen Spiralen. Dieſe iſt alſo, wie ſich hier beiläufig zeigt, überhaupt die einfachſte aller doppelt gekrümmten Linien; denn u kann nicht einfacher gewählt werden, ebenſo w nicht, da eine krumme Linie entſtehen ſoll und der Kreis die einfachſte iſt. Die nächſtfolgende iſt die einfachſte der um den geraden Kegel gewundenen Spiralen; auch hier bleibt u conſtant. U. ſ. w.

Das Grundverfahren (d. i. das definirende) der urſprünglichen Methode iſt demnach auf doppelt gekrümmte Linien eben ſo leicht als auf ebene Curven anzuwenden. Von der Ableitung der Eigenſchaften ſolcher Linien gilt daſſelbe; ein Theil dieſer Unterſuchungen wird künftig in verhältnißmä-

ßig noch höherem Grade als bei den ebenen Curven erleichtert ſein. Dabei hat die Methode noch den Vortheil, daß ſie alle doppelt gekrümmten Linien vor der Betrachtung der gebogenen Flächen und ohne alle Rückſicht auf ſie bequem behandeln kann.

Uebrigens ſieht man leicht, wie die Linien von einfacher und die von doppelter Krümmung ſich gemeinſchaftlich behandeln und die erſteren als ein beſonderer Fall der letzteren betrachten laſſen. Dieſe Aufgabe hat die Wiſſenſchaft zu löſen, wo ſie nach ſtreng herabſteigender Methode verfahren will.

§. 17.

Da eine Fläche, als ſolche, durch die Bewegung einer Linie ſich bildet, ſo wird die urſprüngliche Methode ſo wohl das Geſetz, nach welchem die bewegliche Linie, als ſolche, entſteht, als auch das Geſetz, nach welchem ſie ſich bewegt, in's Auge zu faſſen haben.

1. Die Bewegliche ſei eine unendliche Gerade.

a. Sie bewege ſich bloß progreſſiv, d. h. parallel mit ſich ſelbſt fort. Geſchieht dieſes auf einer Geraden, ſo entſteht die Ebene, geſchieht es auf einem Kreiſe, der Cylinder, entweder der ge-

wöhnliche oder der elliptiſche, je nachdem die Bewegliche ſenkrecht oder ſchief auf der Kreisebene ſteht. Iſt der Weg eine andere ebene Curve, z. B. eine Spirale, ſo wird irgend eine cylindriſche Fläche erzeugt, z. B. die ſpiraliſche Rolle, durch Aufrollung eines Papierblattes darſtellbar. Bei allen Flächen dieſer Art, die allgemein die cylindriſchen heißen, haben wir es reel nur mit 2 Veränderlichen, denen der ebenen Krummen, zu thun, da die außerdem vorhandene veränderliche Gerade nur als einfache Dimenſion wirkt. Die cylindriſchen Flächen ſind alſo die einfachſten unter den gebogenen, und als bloße ebene Curven, die körperliche Dimenſion angenommen haben, zu betrachten.

b. Die Gerade bewege ſich bloß drehend. Einer ihrer Punkte verharrt alſo an ſeinem Orte und um dieſen geſchieht die drehende Bewegung der Linie.

Um zu finden, von welchen Veränderlichen dieſe Bewegung abhängt, denken wir die ſich Drehende in 3 verſchiedenen Lagen fixirt. Nun ſpringt gleich in die Augen, daß 2 Winkel die Lage von je zweien dieſer Linien beſtimmen: die Lage z. B. der zweiten gegen die dritte Linie hängt einerſeits von dem ebenen Winkel ab, den ſie mit einander in der ihnen gemeinſchaftlichen Ebene bilden, ande-

rerſeits von dem Neigungswinkel dieſer Ebene gegen diejenige, in welcher die erſte und zweite Linie liegen.

Statt dieſer beiden Winkel können jedoch auch hier zwei andere gewählt werden. Legt man nämlich durch den ruhenden Punkt der bewegten Geraden eine Ebene, ſo hat die Gerade gegen dieſe irgend eine Neigung. Dieſe Neigung wird nach §. 16 durch 2 ebene Winkel, den Horizontal-Winkel (in der Grundebene) und den Vertical- oder Erhebungs-Winkel (in der darauf geſtellten ſenkrechten Ebene) beſtimmt. Der Horizontal-Winkel iſt hier in Beziehung auf den ruhenden Punkt ein Centriwinkel und kann deshalb dieſen Namen erhalten. Während nun die erzeugende Linie ſich dreht, werden beide Winkel einer geſetzlichen Veränderung unterworfen ſein können.

Es handelt ſich alſo auch hier um die gegenſeitige Abhängigkeit nur zweier Veränderlichen und zwar zweier Winkel, wozu außerdem noch die willkührlich veränderliche Dimenſion der Geraden kommt. So viele verſchiedene Geſetze der Abhängigkeit zweier Veränderlichen oder ſo viele ebene Curven möglich ſind, ſo viele Flächen dieſer Art giebt es alſo. Sie ſind mit gemeinſchaftlichem

Namen die coniſchen genannt, und die angegebene Weiſe ihrer Erzeugung iſt die urſprüngliche. Jedoch laſſen ſie ſich auf verſchiedene Arten hervorbringen und daher auch unterſuchen, wie dieſes mit allen gebogenen Flächen der Fall iſt. Gewöhnlich ſetzt man eine ebene Curve, deren Ebene außerhalb des oben bezeichneten feſtliegenden Punktes liegt, und regulirt die Drehung der Geraden durch das Herumführen derſelben an der Curve. Iſt dieſe z. B. eine Parabel, ſo entſteht die paraboliſch-coniſche Fläche, iſt ſie eine Spirale, die ſpiraliſch-coniſche Fläche ꝛc.

Anfänger faſſen leicht den Begriff der coniſchen Flächen zu eng auf und müſſen wohl beachten, daß die Eigenſchaft, einen endlichen Raum völlig zu umſchließen, nicht zu ihrem Weſen gehört. Nach der einen Dimenſion iſt dieſe endliche Umſchließung unmöglich, nach den beiden anderen nur möglich, nicht nothwendig. Denn was die erſte Dimenſion betrifft, ſo muß die bewegliche Gerade ſchlechterdings unendlich gedacht werden, man erhält ſonſt einen endlichen Theil einer unendlichen gebogenen Fläche, wie bei der Erzeugung des gemeinen Kegels durch Drehung einer endlichen Geraden. Die Grundebene des letzteren gehört keineswegs zu ſei-

ner geſetzlichen Form, ſondern iſt als hindurchgelegt zu denken; überhaupt iſt an keiner gebogenen Fläche als ſolcher eine Begrenzungsebene oder eine Ebene als Beſtandtheil. Nach den beiden anderen Dimenſionen iſt der Raum nur dann geſchloſſen, wenn die Gerade an einer in ſich zurückkehrenden Curve herumgeführt wird; in jedem anderen Falle zieht ſich die coniſche Fläche mehr oder weniger ebenenartig auseinander, beſonders wenn die Curve eine einfache langgeſtreckte z. B. die Sinuſoide iſt. — Für die cylindriſchen Flächen gelten ganz dieſelben Bemerkungen.

Unter den coniſchen iſt die einfachſte der Mantel des geraden gemeinen Kegels, denn er entſteht nach unſerer Erzeugungsweiſe, wenn man den Vertical-Winkel conſtant ſetzt. Die coniſchen Flächen überhaupt zeigen ſich als die einfachſten nach den cylindriſchen. Es könnte ſogar ſcheinen, als machten ſie dieſen in dieſer Rückſicht den Rang ſtreitig, weil man auch hier außer der einfachen Dimenſion der Geraden nur zweier Veränderlichen bedarf; aber man muß nicht überſehen, daß die rotirende Bewegung höherer Natur als die fortſchreitende iſt; denn bei der einfachen drehenden Bewegung beſchreiben die Punkte der bewegten Linie concen-

triſche Kreiſe, bei der bloß progreſſiven Bewegung gleiche gerade Linien. Die drehende Bewegung kann daher als eine wenn auch ſehr einfache Function zwiſchen 2 Veränderlichen mehr geltend angeſchlagen werden. Man ſieht auch, daß es ſo iſt, wenn man irgend eine coniſche Fläche durch eine ebene Curve bildet, die parallel mit ſich ſelbſt fortſchreitet und die dabei nach Verhältniß ihres Fortſchreitens ihre Größe verändert. Hier hat man zuerſt die Function der ebenen Curve an ſich und außerdem die Function zwiſchen der Größe ihres Fortſchrittes und ihrer eigenen Ausdehnung, während man bei der Bildung der coniſchen Fläche durch Drehung reel nur einer einzigen Function zwiſchen 2 Veränderlichen bedarf.

c. Die Gerade bewege ſich zugleich fortſchreitend und drehend. Geſchieht der Fortſchritt auf einer ebenen Curve, ſo haben wir (außer der einfachen Dimenſion der Geraden) offenbar 4 Veränderliche, da die Beſtimmung der Neigung der Geraden gegen die Ebene der Curve durch 2 Winkel erfolgt. Aber von einem einzigen unter den vier veränderlichen Beſtandtheilen hängen die drei übrigen ab, weshalb drei Gleichungen unter je zwei Veränderlichen zur Definition ausreichen. Hier entſteht

eine groſse Mannigfaltigkeit intereſſanter Flächen, von denen erſt wenige bekannt ſind. Die einfachſte durch nur zwei Gleichungen beſtimmbare Art derſelben geht hervor, wenn man die bewegliche Gerade auf einer ebenfalls Geraden (durch die man beliebig eine Ebene gelegt denke) ſich bewegen läſst, und innerhalb dieſer Art wieder die einfachſte Unterart, indem man dabei den Horizontal-Winkel der Drehung conſtant, am einfachſten 90° nimmt, und nur den Vertical-Winkel einer geſetzlichen vom Fortſchritte abhängigen Veränderung unterwirft. Iſt dieſe Veränderung dem Fortſchritte proportional, ſo entſteht die einfachſte der Flächen dieſer Unterart, die gemeine Wendeltreppe. Noch anziehender ſind andere hierher gehörige Formen, z. B. die durch Bewegung der Geraden auf einer Kreislinie entſtehende, wenn beide Winkel ſich dem Fortſchritte proportional verändern. — Die Vorſtellung ſolcher Flächen-Arten wird erleichtert, wenn man die bewegliche Gerade zuerſt endlich denkt, und erſt nach ſo geſchehener Bildung der Form verunendlicht. Wünſcht man ſolche Flächen äuſserlich darzuſtellen, ſo geſchieht es am bequemſten durch Nadeln, die auf einer Ebene von weichem Holze geſteckt werden.

Da dieſe Flächen-Art ſich zu den beiden vori-

gen (a und b) wie das Allgemeine zu dem Besonderen verhält, so können die cylindrischen und conischen Flächen als mit unter diesen begriffen gedacht werden. Die cylindrischen, indem man die beiden Drehungswinkel constant setzt, die conischen auf doppelte Weise, indem man entweder den Fortschritt so wie den mit ihm verbundenen in seiner Ebene liegenden Winkel annihilirt oder die Drehungswinkel so bestimmt, daß die bewegliche Gerade stets durch einen und denselben Punkt läuft. Den Flächen dieser Rubrik würde man daher nicht unschicklich den Namen der cylindrisch-conischen beilegen.

Alle drei Flächen-Arten (a, b, c) dieser Klasse (1) pflegt man unter der Benennung der einfach gebogenen zusammen zu fassen, und sie werden, ihrer Erzeugung gemäß, characterisirt, indem man sagt, es lasse sich von jedem beliebigen Punkte in ihnen aus nach irgend einer Richtung eine Gerade ziehen.

In dieser kleinen Entwickelung sind zugleich die Grundzüge der wissenschaftlichen Eintheilung der einfach gebogenen Flächen gegeben.

2. Die Bewegliche ist eine Krumme.

Es eröffnet ſich hier in den doppelt gebogenen Flächen, als den höchſten Gegenſtänden der Geometrie, ein unabſehbares Gebiet voll überſchwänglichen Reichthums an Formen. Um ſie unter die Herrſchaft unſerer Methode zu bringen genügt die Bemerkung der Ueberſchrift, daß die Erzeugende eine Krumme, ſtatt vorher unter a eine Gerade iſt. Die Beſtimmung der Formen erfolgt alſo hier auf ähnlichem Wege wie vorher, wir haben es immer mit der gegenſeitigen Abhängigkeit von veränderlichen Längen und Drehungsgrößen zu thun, wodurch Verbreitung und Geſtaltung der Fläche hervorgehen. Nur vermehrt ſich noch die Anzahl der Veränderlichen. Die einfachſten Flächen unter den doppelt gebogenen ſind die durch Rotation hervorgehenden, unter denen die Kugel voran ſteht.

Die vollſtändigen Gleichungen für dieſe zweite Klaſſe ſchließen auch die Flächen der erſten Klaſſe in ſich. Von den Gleichungen bei der Eintheilung der Flächen auszugehen iſt nicht eher thunlich, bis, wie hier geſchehen, die vorkommenden Veränderlichen characteriſirt ſind. Die Behandlung dieſer Gleichungen zur Unterſuchung der Flächen nach der urſprünglichen Methode findet in der Behandlung der ebenen Curven ein weſentlich erleichterndes Vorbild,

wenn gleich kein völlig umfaſſendes, da noch eigenthümliche Momente bei den Flächen hinzutreten. Die größere Zahl der Veränderlichen, die dieſe Methode bei den höheren Flächen fordert, darf nicht zu der Anſicht verleiten, als ſeien die Unterſuchungen nach derſelben ſchwieriger, als nach der Coordinaten-Methode (mit 3 Axen). Dieſe iſt die Methode für die Körperräume und deren Dimenſionen; ihre Relativität für die gebogene Fläche als ſolche iſt Urſache zu vielen vermeidlichen Schwierigkeiten in der Behandlung derſelben geworden.

§. 18.

Aus dem Bisherigen wird ſowohl das Weſen als die Urſprünglichkeit und wiſſenſchaftliche Nothwendigkeit der neuen Methode, ſo weit ſie definirend, nicht analyſirend oder demonſtrirend iſt (welches Letztere noch nicht hierher gehört), klar geworden ſein. Ich ſchließe daher dieſes Kapitel mit folgender Begriffbeſtimmung:

Die urſprüngliche Methode (im engeren Sinne) iſt diejenige Methode der höheren Geometrie, nach welcher jede Linie in der Ebene vermöge des Größengeſetzes, das die gegenſeitige Abhängigkeit ihrer veränderlichen Länge und ihrer Drehung oder Richtungsveränderung aus-

drückt, gedacht oder erzeugt, und nach allen ihren Beziehungen und Eigenschaften durch zweckdienliche Handhabung dieses Abhängigkeitgesetzes erkannt wird; diejenige Methode, die ferner auch die doppelt gekrümmten Linien und gebogenen Flächen vermittelst Functionen zwischen den an ihnen vorkommenden einfachen Ausdehnungen und Richtungsveränderungen bestimmt und erforscht.

Demnach ist diese Methode, gleich der Coordinaten-Methode, eine analytische. Sie geht von den Functionen aus, bildet nach Maaßgabe der systematischen Anordnung dieser das Gebäude der Wissenschaft und stellt dabei allgemeine Methoden der Behandlung der Functionen zu den verschiedenen Zwecken der Untersuchung auf.

Dritter Abſchnitt.

Ueber die Eintheilung der ebenen Curven und ihrer Eigenſchaften.

Erſtes Kapitel.

Unterſcheidung zweier Hauptſyſteme von Eigenſchaften. Umriß eines allgemeinen Syſtemes der abſoluten Eigenſchaften ebener Curven.

§. 19.

Die Claſſification der Curven ſelbſt geſchieht nothwendig vermittelſt der Begriffe derſelben; ſie hängt alſo von der Claſſification der Functionen ab. Aber es iſt die Frage, ob unmittelbar die Begriffe ſelbſt und ihre Merkmale die Unterſcheidungsgründe darbieten oder ob erſt die Entfaltung der Begriffe, bis zu einem gewiſſen Grade, alſo die Ableitung wenigſtens der nächſten und er-

ſten Eigenſchaften aus denſelben genügende Kriterien liefern. Man hat bisher beide Principien vereinigt angewendet. Die algebraiſchen Curven werden nach dem Grade der Function, alſo unmittelbar durch den Begriff ſelbſt und zwar durch ein einzelnes Merkmal deſſelben unterſchieden; Curven eines und deſſelben Grades aber nach gewiſſen elementaren Eigenſchaften, z. B. der Anzahl der Zweige, der Geſchloſſenheit oder offenen Unendlichkeit des Laufes ꝛc.; wie es bei den Kegelſchnitten, auch bei den Linien der dritten Ordnung geſchieht. Bleibt aber auch die Frage, ob man mit den Begriffen ſelbſt ausreiche oder nicht, unerörtert, ſo iſt doch jedenfalls gewiß, daß die Eintheilung der Curven ſelbſt nahe mit der Eintheilung gewiſſer Eigenſchaften derſelben zuſammenhängt. Den im zweiten Kapitel folgenden Andeutungen über eine künftige ſachgemäße Klaſſificirung der Curven laſſe ich deshalb die oberſte Eintheilung der Eigenſchaften und eine nähere Characteriſirung ihrer erſten Hauptklaſſe vorangehen.

§. 20.

Ein weſentlicher Mangel der bisherigen Bearbeitungen der Wiſſenſchaft beſteht nicht nur in der Abweſenheit eines methodiſchen Verfahrens, nach welchem

aus dem Begriff einer Curve der Complex der Eigenſchaften in geſetzmäßiger Folge und bis auf eine gewiſſe Grenze vollſtändig entwickelt würde, ſondern in der gänzlichen Unordnung, Willkühr und vollendeten Unwiſſenſchaftlichkeit, die in dieſer Rückſicht herrſcht. *) Bald ſieht man eine Eigenſchaft dieſer, bald jener Art entwickelt, bald fehlt dieſe oder jene ohne Grund, häufig muß man mit der Rectification, Quadratur und dem Appliciren einer Tangente fürlieb nehmen. Erkenntniß einer Curve hat indeß nur der, der von der unendlichen Reihe ihrer Eigenſchaften eine gewiſſe Anzahl von Gliedern, vom erſten an, in ſyſtematiſch zuſammenhängender Aufeinanderfolge, ihres Zuſammenhanges ſich bewußt, überblickt; nicht der, der dieſe oder jene vereinzelte Eigenſchaft einſieht. Viel mehr als das Letztere iſt meiſtentheils bisher nicht angeſtrebt oder erreicht. Nur hier oder da drang die günſtige Beſchaffenheit des Gegenſtandes die Entwickelung einer kleineren oder größeren Kette zuſammenhängender

*) Dieſer unumwunden ausgeſprochene Tadel trifft den Zuſtand der Wiſſenſchaft, nicht ihre ſorgſamen und gewandten Bearbeiter. Für jede vervollkommnende Metamorphoſe muß erſt die Stunde geſchlagen haben, und nur wer ſie überhört, eignet ſich ſelbſt den Tadel zu.

Eigenschaften auf, doch nirgend findet sich eine eigentliche Systematik für dieselben. Auf diese kommt es vornehmlich an und sie muß das Augenmerk der Forscher sein. Die Coordinaten-Methode legt ihr wegen der Künstlichkeit, mit der sie das eigentliche Object behandelt, in Beziehung auf dieses selbst fast unüberwindliche Schwierigkeiten in den Weg; die neue Methode führt ungleich leichter auf den natürlichen Zusammenhang der Eigenschaften einer Curve.

§. 21.

Um die Begriffe: Begriff einer krummen Linie und Eigenschaft derselben, zu sondern, mag zunächst Folgendes bemerkt werden:

Der Begriff, die gesetzmäßige Einheit einer Curve, spricht sich nicht nur darin aus, daß ihre Elemente, Länge und Winkel oder Drehung, von einem einzigen bestimmten, sondern daß sie von irgend einem beliebigen Punkte in ihr aus gerechnet, bis zu jedem beliebigen Punkte in ihr, also für ihren ganzen Lauf, in einer und derselben gegenseitigen Abhängigkeit stehen. Wählt man den Punkt, von dem man ausgeht, den Anfangspunkt, anderswo, so kann zwar die Abhängigkeit eine andere werden, aber für jeden einmal gewählten Anfangspunkt, er

ſei gewählt, wo er wolle, iſt die Abhängigkeit in derſelben Curve eine und dieſelbe. Dies iſt leicht zu zeigen. Iſt die Function einmal geſetzt, ſo iſt mit ihr auch der Anfangspunkt, im Verhältniß zu dem Laufe der Curve, gegeben. Denn nimmt man in der Function die Länge $= 0$, ſo hat man den Anfangspunkt und für ihn einen beſtimmten Werth für die Drehung, die die Curve in dieſem Punkte von der Anfangsrichtung aus ſchon gemacht hat, es ſei dieſe Größe nun poſitiv oder negativ, 0, endlich oder unendlich, möglich oder unmöglich. So lange man nun den Anfangspunkt nicht ändert, iſt die Function von ihm aus dieſelbe für alle Punkte. Geſchieht aber eine ſolche Aenderung (wie es oft zur Erforſchung der Curve nöthig iſt), ſchiebt man alſo den Anfangspunkt vor oder zurück, d. h. ſetzt man an die Stelle von s in der Function $s' \pm a$, ſo iſt begreiflich, daß die Function dadurch eine Veränderung erleiden könne; nachdem dieſes aber geſchehen, bleibt ſie in Beziehung auf den neuen Anfangspunkt für den ganzen Lauf der Curve unveränderlich dieſelbe. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß durch dieſe Verlegung des Anfangspunktes die Curve *an ſich* niemals eine Aenderung erfahren kann.

Das über die Veränderung des Anfangspunktes Gesagte gilt in ähnlichem Sinne für die Veränderung der Anfangsrichtung. Sie geschieht durch Einschiebung von $w' \pm a$ für w in die Function. Sollen Anfangspunkt und Anfangsrichtung zugleich verändert werden, so sind beide Einschiebungen zugleich vorzunehmen.

Durch diese auch sonst nöthige Auseinandersezzung wird die Vorstellung von dem Wesen einer ebenen Curve vollkommen lebendig geworden sein. Man wird nun gleich einstimmen, wenn gesagt wird, von allen Eigenschaften unterscheide sich der ächte Begriff einer Krummen dadurch, daß er die Abhängigkeit seiner Urbestandtheile, Länge und Drehung, für alle Werthe, die sie annehmen können, für den ganzen Verlauf der Linie ein für allemal, aber auch nichts weiter als dieses, bestimmt. Dasselbe ist bei keiner Eigenschaft der Fall, wie der folgende §. näher zeigt. Eine Eigenschaft kann also nie im eigentlichen, sondern nur im uneigentlichen Sinne, zu gewissen Zwecken, die Stelle des Begriffes vertreten.

§. 22.

Die Eigenschaften geometrischer Gebilde überhaupt zerfallen in zwei Haupt-Klassen, deren Un-

terſcheidung wichtig iſt. Eine Eigenſchaft drückt nämlich entweder aus

1.) die gegenſeitige Abhängigkeit von räumlichen Beſtimmungen, die im Begriffe ſelbſt liegen oder doch ein unmittelbares Erzeugniß deſſelben ſind, ohne jedoch lediglich die den Begriff ſelbſt vollſtändig baſirenden zu ſein; oder

2.) eine Relation unter Beſtimmungen der eben genannten Art und anderweitigen durch den Begriff weder unmittelbar noch mittelbar gegebenen, alſo von außen hinzukommenden räumlichen Beſtimmungen.

Die erſten Eigenſchaften ſind ihrem Weſen nach abſolute, die anderen relative. Von den erſteren kommt jedem Gebilde eine endliche, von den letzteren eine unendliche Anzahl zu. Die erſteren ſind in der Regel vor den relativen vollſtändig und in ſyſtematiſcher Folge abzuleiten; in der höheren Geometrie wenigſtens kann dies ohne Uebelſtände überall ſtreng geſchehen. In den abſoluten Eigenſchaften liegt eine in ſich beſchloſſene, völlig befriedigende Erkenntniß des Objectes ſelbſt als eines einzelnen, für ſich beſtehenden. Nachdem ſie gewonnen iſt, tritt das Bewußtſein der Dürftigkeit dieſer Erkenntniß hervor und es regt ſich das

höhere Bedürfniß, den Zusammenhang dieses Objectes mit den verwandten und überhaupt mit der unendlichen Zahl der übrigen einfachen und zusammengesetzten zu erkennen. Da erst hierdurch der einzelne Gegenstand in den großen Zusammenhang mit einem Theile von der Gesammtheit der wissenschaftlichen Begriffe und Urtheile, also mit der Wissenschaft tritt, so sind in so fern die relativen Eigenschaften höherer Natur, als die absoluten, und pflegen sich deshalb leicht vorzudrängen, ehe den absoluten ihr Recht geschehen. Beide Arten sind weiterer Unterabtheilungen aus verschiedenen Gesichtspunkten fähig. Besonders gilt dieses von den relativen. Die Willkühr in ihrer Aufnahme ist daher schwer zu beherrschen; sie erfordert große Wachsamkeit und einen viel umfassenden Ueberblick, vollständige, streng richtige Grundbegriffe und eine sachgemäße Methode. Es würde nicht schwer sein zu zeigen, daß in dieser Rücksicht weit größere Schwierigkeiten in der niederen als in der höheren Geometrie zu überwinden sind.

Diese Verschiedenheit beider Systeme von Eigenschaften geht durch die ganze Mathematik, ist aber in der Geometrie am auffallendsten und wichtigsten.

§. 23.

Zur Skizzirung eines allgemeinen Systemes der absoluten Eigenschaften ebener Curven bedarf man allgemein logischer und mathematischer Grundbegriffe, die daher in ihrem Zusammenhange hier entwickelt und aufgeführt werden müßten. Doch fürchte ich, den Leser, der nach seinem Geschmacke des Allgemeinen außerdem schon zur Genüge erhalten wird, durch ein solches Verfahren zu erschrecken, und stelle daher die Gestaltung in den Grundzügen aus freier Hand hin. Ueberdem ist es nicht schwer, die hierher gehörigen Ideen durch eine aufmerksame Vergleichung des Begriffes von dem Begriffe einer ebenen Curve (§. 21, Schluß) mit dem Begriffe einer absoluten Eigenschaft (§. 22, 1) aufzufinden und eine vorläufige Ueberzeugung von der Nothwendigkeit derselben und ihrer Anwendung sich zu verschaffen.

1.) Die erste Frage ist nach der Anzahl der gesonderten Reihen von Werthen, welche jeder der beiden veränderlichen Bestandtheile annehmen kann. Hierdurch bestimmt sich die Verzweigung der Linie in Rücksicht auf die Anzahl der Aeste; der Umfang des Begriffes wird im Allge-

meinen ausgemittelt. Hier kann ſich gleich anſchließen

2.) die Entſcheidung darüber, ob ganze Zweige oder Haupttheile derſelben entweder identiſch ſind oder im Allgemeinen ungleich.

3.) Unterſuchung der nothwendigen Grenzen. a) Wie bedingen ſich die Außengrenzen der Beſtandtheile? Endlichkeit oder Unendlichkeit der Werthreihen, alſo des Laufes der Linie.

4.) Unterſuchung der nothwendigen Grenzen. b) Wie bedingen ſich etwaige Binnengrenzen der Beſtandtheile, d. h. erreichen die Werthe des einen oder des andern ein Maximum oder ein Minimum? — Dieſe Unterſuchung entſcheidet über die Abweſenheit oder die Anweſenheit ſo wie über die Lage der Wendungspunkte, Spizzen und Schnäbel.

Anmerk. Die Ergebniſſe dieſer vier Unterſuchungen bezeichnen den Lauf der Linie im Allgemeinen.

5.) Unterſuchung willkührlicher Grenzen. Selbſtausmeſſung der Linie, in Beziehung auf die Länge.

6.) Unterſuchung willkührlicher Grenzen. Selbſtausmeſſung der Linie in Beziehung auf die

Drehung. Hierher gehört das Anlegen von Tangenten. (Dieſe ſonſt ſo bedeutende Aufgabe reducirt ſich hier auf das bloße Einſchieben eines beſtimmten Werthes für s in die gegebene Function.)

7.) Erörterungen über Concavität und Convexität, geſtützt auf die Unterſuchungen der letzten Nummer.

Anmerk. Die Beantwortung dieſer erſten 7 Fragen geſchieht durch eine Analyſe der gegebenen Function ſelbſt.

8.) Das Erzeugniß der Relation der Beſtandtheile iſt die Krümmung. Unterſuchung der Krümmungsſtärke aller Punkte.

9.) Nothwendige Grenzen der Krümmung, d. h. Punkte der größten und kleinſten Krümmung.

10.) Willkührliche Grenzen der Krümmung. An welchen Punkten hat die Curve dieſe oder jene gegebene Krümmung, ꝛc.

11.) Krümmungsgeſetz, Geſtalt der Curve, Metamorphoſe der Geſtalt.

Anmerk. Die Beantwortung der vier letzten Fragen geſchieht durch eine Analyſe der Differentialgleichung der gegebenen Function.

12.) Endlich gehört zu den abſoluten Eigenſchaften die Gemeinſchaftlichkeit oder Nicht-Gemeinſchaftlichkeit von Punkten. Die Unterſuchung darüber zerfällt in die Fragen über

a) Selbſtbedeckung, wodurch geſchloſſene Linien, wie die Ellipſe, Lemniscata ꝛc. entſtehen.

b) Selbſtſchneidung, die Curve ſchneidet ſich ſelbſt, wodurch mehrfache Punkte, und, bei Wiederholung derſelben, Netz- oder Knotenlinien gebildet werden.

c) Selbſtberührung. Auch in dieſem Falle findet immer ein mehrfacher Punkt Statt. (Mehrfache Punkte ſind nur da, wo von einem Punkte wenigſtens 4 Linien ausgehen.)

d) Selbſtmeidung oder Nicht-Gemeinſchaftlichkeit von Punkten. Die Linie kehrt niemals zu einem einmal durchlaufenen Punkte zurück. Hierunter die beſonderen Fälle der Einſchließung und Ausſchließung, oder des Mangels Beider.

Zweites Kapitel.

Andeutungen über die Eintheilung der Curven ſelbſt.

§. 24.

Es wird allgemein immer dringender das Bedürfniß eines ſachgemäßeren Principes der Claſſificirung der Curven gefühlt. An dem bisher zu Grunde gelegten iſt mancherlei auszuſetzen. Man hat ſich keine ſtrenge Rechenſchaft darüber gegeben, worin eigentlich das Kriterium für die (natürliche) Klaſſe, Gattung und Art einer Curve liegt, nach welchen Merkmalen man darüber entſcheidet, ob zwei Curven zu einer und derſelben oder zu einer andern Hauptreihe, Abtheilung und Unterabtheilung gehören. Die Unterſcheidung der Curven in algebraiſche und transcendente und der letzteren nach ihren Graden ladet dazu ein, dieſes auf ſich beruhen zu laſſen. So ſtreng begrifflich auch dieſe letztere Claſſificirung iſt, ſo gründet ſie ſich doch auf ein willkührlich ausgewähltes Merkmal, willkührlich in ſo fern, als dieſe Wahl nicht auf einer Erkenntniß des nothwendigen Zuſammenhanges dieſes Merkmales mit einem wiſſenſchaftlich gerechtfertigten und dadurch völlig ſachgemäßen Principe der Claſſificirung beruht.

Man hat gefunden, daß in einer Gleichung eines und deſſelben Grades verſchiedene Curvenſpecies enthalten ſein können, und über dieſe Verſchiedenheit nach dem durch die Auffaſſung der Function bedingten ganz verſchiedenartigen Laufe der Curven geurtheilt, ohne eben nach gehörig geordneten und vollſtändig abgeleiteten Merkmalen über dieſe Verſchiedenheit des Laufes zu entſcheiden. Man theilte die Curven einer Gleichung nach denjenigen eben vorliegenden Verſchiedenheiten ein, die ſich als weſentliche bemerklich machten, ohne ſich dabei auf ein Syſtem aller möglichen Verſchiedenheiten zu beziehen. Es blieb daher auch als etwas Gleichgültiges bei der Discuſſion unerörtert, daß dieſe zunächſt als Verſchiedenheit der Species angeſprochene Abweichung Verſchiedenheit der Gattung ſei. Parabel, Ellipſe und Hyperbel ſind z. B., wie bekannt, drei verſchiedene Gattungen von Curven, und von jeder Gattung iſt eine Species in der Gleichung des zweiten Grades enthalten. Der Grad der Gleichung entſcheidet überhaupt nur darüber, zu welcher Species einer Gattung die entſprechende Curve gehört, nicht über die Gattung, die, wie man im Allgemeinen weiß, von der Form der Gleichung abhängt. Deſſen ungeachtet hat man den Grad der

dazu gewählt, kann nicht anders, als ohne Ende (ich ſage nicht: unendlich groß) gedacht werden. Denn vom Anfangspunkte oder der Anfangsrichtung aus ſoll er jeden möglichen Werth erhalten. Läßt die Function den Wachsthum dieſes Werthes in's unendlich Große zu, ſo iſt dadurch der Beſtandtheil ohne Ende. Kann er vermöge der Function nicht unendlich groß werden, ſo giebt es einen höchſten endlichen Werth für denſelben. Dann laſſen ſich zwei Fälle denken. Entweder wird dieſer höchſte endliche Werth nie vollkommen erreicht, ſondern es findet nur eine immer größere Annäherung an denſelben Statt, der endliche Werth iſt die Grenze, der ſich der Beſtandtheil ohne Ende nähert: dann iſt der Beſtandtheil wieder ohne Ende. Oder ein höchſter endlicher Werth wird wirklich erreicht. In dieſem intereſſanten Falle laufen die fernerhin möglichen Werthe vom Grenzpunkte oder der Grenzrichtung aus, wodurch ihrem weiteren Vordringen ein Ziel geſetzt wurde, in umgekehrter Folge wieder zurück. Man iſt nämlich, wenn neue endliche Werthe für den Beſtandtheil nicht mehr möglich ſind, nicht allein berechtigt, die alten im Zurückſchreiten zu wiederholen, ſo daß die vom Grenzpunkte an im Rückſchritte hinzukommenden als negative Werthe die

früheren poſitiven zuerſt zum Theil und endlich ganz wieder aufheben, um dann von neuem vorwärts zu ſchreiten, darauf abermals rückwärts und ſo im unendlichen Hin- und Wiederſchwanken fort, — ſondern auch dazu verpflichtet. Denn der Beſtandtheil ſoll nicht allein alle mögliche Größenwerthe durchlaufen, ſondern jeder von dieſen Größenwerthen ſoll auch auf alle mögliche Arten gedacht werden, d. h. man ſoll ſich ihn als aus Theilen, die in entgegengeſetzter Beziehung ſtehen, zuſammengeſetzt vorſtellen, und dieſes ſo oft, als die Theile verſchiedene Größe anzunehmen fähig ſind, ohne den Geſammtwerth zu ändern, d. h. unendlich oft. (Z. B den Größenwerth 9 eines Beſtandtheiles als 9, als 10 — 1, $10\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2}$, 12 — 3, 18 — 9, 27 — 18, 1009 — 1000 u. ſ. f.) Denn geſchieht dieſes nicht, ſo iſt der volle Umfang des in der Function liegenden Begriffes nicht ausgemeſſen, weil die Beſtimmungen, die er als ſpecielle zuließ, nicht alle Modificationen erhielten, deren ſie fähig ſind. Dieſer volle Umfang der Function ſoll aber durchmeſſen werden, weil die Forderung iſt, daß ſie ſowohl als das Raumgebild, das ſie bezeichnet, vollſtändig und als Ganzes gedacht werde, welches ohne ihre gänzliche Erſchöpfung nicht geſchähe. Alſo auch im Falle der

endlichen Größe des Beſtandtheiles iſt dennoch ſeine Bewegung (ich wüßte hier keinen bezeichnenderen Ausdruck) ohne Ende. Ganz gleichgültig iſt für unſere Betrachtung hierbei, ob bei der Wiederholung der alten Werthe auf die angegebene Weiſe, bei dem Rückſchritte des Beſtandtheiles, die Curve ſich ſelbſt deckt, oder einen von ihr noch unbetretenen Weg einſchlägt. Im erſteren Falle würde ſie als eine unſichtbar ohne Ende fortſchreitende anzuſprechen ſein. Weiter unten iſt als Beiſpiel eine im Vor- und Rückwärtsſchreiten wechſelnde Linie ausführlich betrachtet.

Da nun der willkührliche Beſtandtheil ſchlechterdings ohne Ende iſt, beide Beſtandtheile aber gleichermaßen, ſowohl die Länge als auch die Drehung, als willkührlich veränderliche Größen aufgefaßt werden können, ſo iſt damit erwieſen, daß beide Beſtandtheile der Curve, alſo auch ſie ſelbſt nothwendig ohne Ende ſind. Und zwar die Curve von einem in ihrem Laufe geſetzten Anfangspunkte an nach einer Seite hinaus. Jede Krumme iſt alſo eine nach allen Richtungen, die ſie einſchlägt, ohne Ende fortſchreitende und ohne Ende ſich drehende, d. h. ohne Ende gekrümmte Linie. Sie wird im einfach-

ſten Falle der Anzahl ihrer Arme eine nach zwei Richtungen ohne Ende fortſchreitende Linie ſein.

§. 26.

I. Die Länge jedes Curven-Armes iſt ohne Ende.

1.) Sie iſt unendlich groß.

2.) Sie iſt endlich groß.

a) Sie nähert ſich der endlichen Größe ohne Ende.

b) Sie hebt die erreichte endliche Größe durch Entgegenſetzung immer von neuem auf und beſteht daher aus einer unendlichen Reihe poſitiver und negativer Stücke.

II. Die Drehung jedes Curven-Armes iſt ohne Ende.

1.) Sie iſt unendlich groß.

2.) Sie iſt endlich groß.

a) Sie nähert ſich der endlichen Größe ohne Ende.

b) Sie hebt die erreichte endliche Größe durch Entgegenſetzung immer von neuem auf und beſteht daher aus einer unendlichen Reihe poſitiver und negativer Wendungen.

Unläugbar sind die vorstehenden Bestimmungen der Drehung und Länge zu oberst entscheidend für die Natur eines Curvenarmes. Es kommt hierbei darauf an, welche Drehungsbestimmung sich mit irgend einer Längenbestimmung verbindet. Die Wesentlichkeit des Gesichtspunktes bestätigt auch der Erfolg. Denn man erhält auf den ersten Blick ohne Weiteres die Begriffe einer Mannigfaltigkeit von Curven-Gattungen. Schließt sich z. B. der Arm I, 1; II, 2, a an den Arm I, 2, a; II, 1, so hat man nach Hinzufügung eines zweiten identischen Zweiges eine Gattung von Halbspiralen ꝛc.

§. 27.

Die Krümmung der Linie, als das stetige Product der Abhängigkeit beider Bestandtheile, begründet dann eine weitere Eintheilung der Curven. Sie kann

I. an allen Punkten der Curve gleiche Stärke haben. (Der Kreis.)

II. in stetiger Veränderung begriffen sein (alle übrige Curven) und zwar, in Beziehung auf einen einzelnen Arm

a) vom Anfangspunkte aus stetig zunehmen,

b) vom Anfangspunkte aus ſtetig abnehmen,

c) abwechſelnd zu- und abnehmen, welcher Fall weitere Unterabtheilungen zuläßt.

Dieſe einfachen Beziehungen (§. 26 und 27) ſind es, worauf es bei einer ſachgemäßen Claſſification der Curven zunächſt ankommen möchte. Außerdem iſt die Anzahl der Arme und ihre gegenſeitige Lage, alſo auch der Grad der Gleichung, wichtig. Ob man dieſe Beziehungen nun, wie es hier geſchehen, ſogleich geometriſch auffaſſen, oder ob man von einer Claſſification der Functionen ausgehen will, iſt an ſich gleichgültig. Als Weg der Forſchung iſt das Letztere ſicherer und im Verfolge unbedingt nothwendig, da man bindende Formen hat und in den Functionen jederzeit die ganzen Curven mit allen ihren Armen vorliegen. Aber am beſten geht das Erſtere, in der angedeuteten Art wenigſtens, voran, weil die Rangordnung unter den Eigenſchaften der Functionen am leichteſten und vollkommen überzeugend aus der Rangordnung der entſprechenden geometriſchen Eigenſchaften erkannt wird. Das wiſſenſchaftliche Verfahren würde dann ſein, die allgemeinen Formen der Functionen aufzuſuchen, welche die verſchiedenen geforderten Haupt-

Unläugbar sind die vorstehenden Bestimmungen der Drehung und Länge zu oberst entscheidend für die Natur eines Curvenarmes. Es kommt hierbei darauf an, welche Drehungsbestimmung sich mit irgend einer Längenbestimmung verbindet. Die Wesentlichkeit des Gesichtspunktes bestätigt auch der Erfolg. Denn man erhält auf den ersten Blick ohne Weiteres die Begriffe einer Mannigfaltigkeit von Curven-Gattungen. Schließt sich z. B. der Arm I, 1; II, 2, a an den Arm I, 2, a; II, 1, so hat man nach Hinzufügung eines zweiten identischen Zweiges eine Gattung von Halbspiralen ꝛc.

§. 27.

Die Krümmung der Linie, als das stetige Product der Abhängigkeit beider Bestandtheile, begründet dann eine weitere Eintheilung der Curven. Sie kann

I. an allen Punkten der Curve gleiche Stärke haben. (Der Kreis.)

II. in stetiger Veränderung begriffen sein (alle übrige Curven) und zwar, in Beziehung auf einen einzelnen Arm

a) vom Anfangspunkte aus stetig zunehmen,

geometrische Bedeutung (unter der Discussion über sie) versteht man die Erforschung und Sonderung der verschiedenen räumlichen Bestimmungen (Punkt, Richtung, gerade Linie, Winkel, Curven verschiedener Art), welche die Gleichung ausdrückt, wenn sie nach und nach unter allen möglichen Bedingungen gedacht wird, denen sie unterworfen werden kann. Diese Bedingungen können in nichts Anderem, als in der verschiedenen Art und Weise bestehen, wie man in der Gleichung die allgemeinen (constanten) Coefficienten in Bezug auf die Relation ihrer Größe und ihrer Vorzeichen näher bestimmt, ohne besondere Zahlenwerthe für sie zu setzen.

§. 30.

Die allgemeine Gleichung des ersten Grades unter zwei Veränderlichen ist:

$$Aw + Bs + C = 0$$

1.) Für $A = 0$, $B = 0$ wird auch $C = 0$. Diese letztere Gleichung enthält keine Beziehung mehr zu Drehung und Fortschritt, ist an sich leer und ohne räumliche Bedeutung.

2.) Für $A = 0$, $C = 0$ entsteht $Bs = 0$, woraus $s = 0$, d. h. es werde kein Fortschritt gemacht.

Die Gleichung bezeichnet daher den Anfangspunkt.

3.) Für $B=0$, $C=0$, erhält man $Aw=0$, woraus $w=0$, d. h. es geschehe keine Drehung. Die Gleichung bezeichnet daher die Anfangsrichtung.

4.) Setzt man $A=0$, B und C endlich, so erfolgt $Bs+C=0$ und daraus $s=-\frac{C}{B}$. Der Fortschritt hat vermöge dieser Gleichung einen beständigen Werth, ohne mit einer Drehung verbunden zu sein; es ist also eine Gerade von gegebener Länge durch die Gleichung bezeichnet. Diese Gerade läuft vom Anfangspunkte aus in der positiven Richtung, wenn die Vorzeichen von B und C verschieden sind, in der negativen Richtung, wenn sie einander gleichen.

5.) Setzt man $B=0$, A und C endlich, so entsteht $Aw+C=0$, und daraus $w=-\frac{C}{A}$. Die Drehung ist von einer beständigen Größe, ohne mit einem Fortschritte verbunden zu sein; daher die Gleichung den ebenen Winkel darstellt. Dieser ist positiv, sobald die Vorzeichen von A und C verschieden sind, negativ im umgekehrten Falle.

6.) Für $C=0$, A und B von endlichem Werthe, wird die Gleichung $Aw+Bs=0$, woraus $w=-\frac{B}{A}s$. Hier sind Drehung und Fortschritt zum ersten Male verbunden; diese Gleichung gehört daher einer krummen Linie an. Da für jeden Fortschritt die dazu gehörige Drehung durch Multiplication mit demselben Coefficienten erhalten wird, also Fortschritt und Drehung für jeden Curvenpunkt in demselben Verhältnisse stehen, dieses aber nach einem Beweise der Elementar-Geometrie *) bei dem Kreise der

*) Die Beziehung auf diesen Beweis ist keine nothwendige; es wäre hinreichend, der so definirten krummen Linie den Namen Kreis beizulegen. Da aber Jedermann die Curve, in welcher Fortschritt und Drehung stets in demselben Verhältnisse stehen, schon als den Kreis kennt, so wäre dieses Ziererei. Jener Beweis leitet aus einer Eigenschaft des Kreises, die er als Definition setzt, die eigentliche Definition, die er umgekehrt als Eigenschaft ansieht, auf folgende Weise ab: Jeder Drehungswinkel gleicht dem zu seinem Bogen gehörigen Centriwinkel. $\angle$ d z. B. (Fig. 7), der die Drehung des Bogens bc ausdrückt, wenn bd, dc Kreistangenten an den Punkten b und c sind, gleicht dem Centriwinkel a, weil der eine wie der andere den $\angle$ e zu 2 R ergänzt. Der $\angle$ d thut dies als Nebenwinkel von e, der $\angle$ a, weil die $\leqslant$ a, b, e, c als Viereckwinkel 4 R betra-

Fall iſt, ſo iſt die krumme Linie der Gleichung der Kreis. — Sind die Vorzeichen von A und B verſchieden, ſo erhält die Gleichung die Form $w = \frac{B}{A} s$, und es wird für jeden poſitiven Fortſchritt auch die Drehung poſitiv (Bogen ad, Fig. 8), für jeden negativen negativ (Bogen af). Der Kreis liegt auf der einen (der rechten) Seite der Anfangsrichtung, die ſeine Tangente iſt. — Sind hingegen A und B von gleichen Vorzeichen, ſo leidet die Gleichung $w = -\frac{B}{A} s$ keine Veränderung, und es verbindet ſich nun dem poſitiven Fortſchritte die negative Drehung (Bog. ah), dem negativen die poſitive (Bog. ag). Der Kreis liegt auf der andern (linken) Seite der Anfangsrichtung, d. i. ſeiner Tangente im Punkte a.

7.) Giebt man allen drei Coefficienten einen endlichen Werth, ſo bleibt die Gleichung in vollſtändiger Form und ihre Löſung in Beziehung auf beide Veränderliche iſt

$$w = -\frac{B}{A} s - \frac{C}{A}, \quad s = -\frac{A}{B} w - \frac{C}{B}.$$

---

m, b und c aber als Tangentialwinkel rechte ſind. Die entriwinkel ſtehen bekanntlich im geraden Verhältniſſe r Bogen, folglich auch die Drehungswinkel.

Die möglichen Verſchiedenheiten in der Annahme der Vorzeichen der Coefficienten geben dieſen Ausdrücken für w oder s vier verſchiedene Geſtalten.

a) Sind A und B entgegengeſetzt, A und C ebenfalls, ſo entſtehen die Ausdrücke

$$w = \frac{B}{A}s + \frac{C}{A}, \quad s = \frac{A}{B}w - \frac{C}{B},$$

worin nunmehr die Coefficienten an ſich poſitiv gedacht ſind.

Für $s = 0$ (in der Gleichung für w) iſt $w = \frac{C}{A}$, d. h. die Richtung, die die Curve im Anfangspunkte hat, weicht von der Anfangsrichtung um den Winkel $+\frac{C}{A}$ ab. Sei dieſer Winkel bad (Fig. 9), wenn a den Anfangspunkt, ab die Anfangsrichtung bedeutet, ſo iſt die Richtung der Curve im Anfangspunkte ad. Für $w = 0$ (in der Gleichung für s) iſt $s = -\frac{C}{B}$, d. h. der Punkt, an welchem die Curve die Anfangsrichtung hat, liegt vom Anfangspunkte um $\frac{C}{B}$ rückwärts. Sei $\frac{C}{B} = af$, ſo hat in f die Curve die Anfangsrichtung fg = der Richtung ab.

Anfangspunkt und Anfangsrichtung fallen alſo an zwei verſchiedene Punkte der Curve.

Da ferner vom Anfangspunkte der Fortſchritt a und der Richtung (ad) an, die die Curve in

dieſem Punkte hat, die Drehung dem Fortſchritte ſtets proportional iſt, indem das in der Gleichung für w den Drehungen hinzuzufügende $\frac{c}{A}$ immer durch ∠ bad hinweggenommen wird, ſo iſt die Curve ſelbſt wieder der Kreis, nur daß ſeine Lage eine andre als vorher (in 6) iſt. Dort war die durch den Anfangspunkt gezogene Anfangsrichtung eine Tangente, hier iſt ſie eine Secante, gegen welche die Tangente des Anfangspunktes (ad), die den Kreis auf der einen (der rechten) Seite hat, poſitiv liegt. — Daſſelbe Ergebniß liefert die Betrachtung der Gleichung für s. Hier bleibt der Fortſchritt (vom Punkt f, Richtung fg an) ſtets der Drehung proportional, denn das von erſterem für irgend einen Werth von w abzuziehende $\frac{c}{B}$ wird immer durch das conſtante af zurückgerechnet, da der eigentliche Anfangspunkt a iſt.

Um dieſe anſchaulich abgeleitete Erkenntniß der Einerleiheit der vorliegenden Krummen mit der unter (6) auf gehörigem exacten Wege zu gewinnen, darf man nur die Anfangsrichtung in den Anfangspunkt der Curve verlegen. Da für $s = 0$, $w = \frac{c}{A}$, ſo iſt zu dieſem Zwecke $w' + \frac{c}{A}$ für w in die Gleichungen zu ſchieben. Dadurch erhält man

$$(2)\ w = -\frac{Bs+D}{2A} \pm \frac{1}{2A}\sqrt{(B^2-4AC)s^2+2(BD-2AE)s+(D^2-4AF)},$$

$$(3)\ s = -\frac{Bw+E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{(B^2-4AC)w^2+2(BE-2CD)w+(E^2-4CF)}.$$

In dieſen Functionen (2) und (3) können die allgemeinen Coefficienten nicht nur alle mögliche poſitive und negative Werthe erhalten, ſondern auch mit Ausnahme von A und C annullirt werden. Setzt man nämlich die letzteren beide zugleich oder je einen von ihnen $= 0$, ſo erhält man, da ſie Diviſoren ſind, aus (2) und (3) unendlich große oder unbeſtimmte Werthe für w und s oder für eins von ihnen. Dieſe Werthe ſind offenbar falſch. Für dieſe Bedingungen kann man alſo die Functionen ohne vorhergegangene Umformung nicht benutzen. Der Grund dieſer Ausnahme liegt darin, daß die Vorausſetzung $A = 0$, $C = 0$ der Gleichung (1) die Quadrate der Veränderlichen raubt, und dann die Löſung durch den Mangel der Wurzelausziehung eine ganz andere Form erhält. Daher könnte man leicht in den Irrthum fallen, die der Gleichung (1) unter der Vorausſetzung $A = 0$, $C = 0$ angehörige Curve für eine des erſten Grades anzuſehen. Aber ſie bleibt nichts deſto weniger eine quadratiſche, da noch ein Glied in ihr zurück iſt, das zwei Dimenſionen der Ver-

änderlichen enthält. Auch bezeugt es die Form der Wurzel ſelbſt. Für $A=0$, $C=0$, entſteht aus (1)

(4) $Bws+Dw+Es+F=0$

und daraus

(5) $w=\frac{-Es-F}{Bs+D}$, (6) $s=\frac{-Dw-F}{Bw+E}$.

Hier iſt die Diviſion einer einfachen Function der Veränderlichen durch eine zweite in ihr nicht aufgehende einfache Function ebenderſelben Veränderlichen gefordert: eine Operation, die in Gleichungen mit zwei Veränderlichen bekanntlich auf derſelben Höhe mit der Quadrat-Wurzelausziehung ſteht. Uebrigens bewährt hinterher die Linie ſelbſt, die dieſer Gleichung angehört, durch ihr Verhältniß zu einer gewiſſen Art von Linien des zweiten Grades die Richtigkeit der Anſicht. Für die Veränderlichen als Coordinaten gilt daſſelbe. Alle 3 Bedingungen geben Hyperbeln; für den einfachſten Fall ſind die Coordinaten-Axen die Aſymptoten ſelbſt. Dem entſprechend laſſen ſich alle drei Bedingungen durch Transformation der Coordinaten den übrigen Fällen (A und C von endlichem Werthe) unterordnen. Man darf alſo dieſe letzte Beſchränkung für (2) und (3) machen, ohne die Allgemeinheit der Unterſuchung zu gefährden.

§. 34.

Dieſes vorausgeſetzt, ſo umfaßt, wie bekannt, jede der allgemeinen Functionen (2) und (3) außer der Gleichung des 1. Grades drei ihrer Art nach von einander verſchiedene ſpecielle Functionen, denen nach der Coordinaten-Methode die Parabel, Ellipſe und Hyperbel entſprechen. Deſſen ungeachtet darf es nicht befremden, wenn ſich nach der urſprünglichen Methode *mehr* als 3 Curvenſpecies aus der Gl. des 2. Grades entwickeln. Zur Erläuterung von einer Seite iſt die Einführung eines einfachen Begriffes, der der Wechſelcurven, nothwendig. So ſollen zwei Krumme genannt werden, wenn in der einen die Länge genau ebenſo von der Drehung, als in der andern die Drehung von der Länge abhängt. Man bildet alſo aus der Gleichung einer Curve die der Wechſelkrummen durch bloße Vertauſchung der Zeichen für beide Veränderliche. So ſind $As = \frac{B.\log w}{w}$ und $Aw = \frac{B.\log s}{s}$, $Ax^2 + Bx = y^2$ und $Ay^2 + By = x^2$ Gleichungen für Wechſelcurven, nur daß im letzteren Falle der Begriff erweitert und auf Abciſſe und Ordinate als Veränderliche ausgedehnt iſt. Man ſieht ſogleich, daß nach dem Coordinatenſyſteme die Wechſelcurve der Para-

bel wieder völlig dieſelbe Linie iſt, und es ſich ebenſo mit Ellipſe und Hyperbel verhält. Denn wenn die Abciſſe die Rolle der Ordinate und umgekehrt übernimmt, ſo hat dieſes in einigen Fällen gar keinen, in den übrigen keinen weiteren Erfolg, als daß die Ordinaten die Curve an einer anderen z. B. der convexen ſtatt der concaven Seite treffen. Anders nach unſerer Methode. Hier kann es zwar auch vorkommen, daß Wechſelcurven identiſch ſind, aber es iſt nicht nothwendig. Die Bedingung dafür zeigt ſogleich der Kreis, auch Gl. (5) und (6), wo der Fall ſich findet. In den meiſten Fällen haben beide Wechſelcurven entgegengeſetzte Beſchaffenheit. Dieſe Relation pflegt intereſſant zu ſein und verdient ſpäter Gegenſtand beſonderer Betrachtungen zu werden. Der Grund der Verſchiedenheit der Wechſelkrummen nach der neuen Methode, wodurch die Anzahl der Curven für dieſelbe Anzahl von Gleichungen ſich ſteigert, liegt in der gänzlichen Verſchiedenartigkeit der Veränderlichen und ihrer Vereinigung zu dem Producte des Begriffes oder der Bildung der Curve ſelbſt.

Vierter Abſchnitt.

Allgemeine Methoden zur Ableitung abſoluter Eigenſchaften der ebenen Curven.

Erſtes Kapitel.

Methode, die Uebergangspunkte, ihre Art, Anzahl und Lage zu finden

§. 35.

Schon oben (§. 10, 13 und 14) wurden die Uebergangspunkte characteriſirt. Wir bedürfen zur Begründung ihrer Unterſuchung einer überſichtlichen Zuſammenſtellung der hierher gehörigen Begriffbeſtimmungen.

1.) Bleibt in einem Punkte der Curve ſowohl ihr Fortſchritt als ihre Drehung unentgegengeſetzt, alſo poſitiv, wenn ſie von irgend einem anderen Punkte aus poſitiv, negativ, wenn ſie

negativ war, so soll ein solcher Punkt ein gemeiner Curven-Punkt heißen. (Fig. 3, c.)

2.) Erhält sich in einem Punkte zwar der Fortschritt unentgegengesetzt, geht aber die Drehung in ihre Entgegensetzung über, d. h. wendet sich die Curve negativ, wenn sie bisher positiv sich drehte und umgekehrt, so erhält ein solcher Punkt den Namen eines Wendungspunktes. (Fig. 4, c.)

3.) Wenn umgekehrt die Länge eine der bisherigen entgegengesetzte wird, die Drehung aber unentgegengesetzt fortgeht, so nennt man den Punkt der Curve, in welchem dieses geschieht, eine Spitze. (Fig. 5, c.)

4.) Ein Schnabel endlich heißt derjenige Punkt einer Krummen, in welchem Beide, Fortschritt und Drehung, den entgegengesetzten Weg zu verfolgen anfangen. (Fig. 6, c.)

Spitze und Schnabel haben den gemeinschaftlichen Namen der Rückkehrpunkte erhalten; das Wesentliche ihrer Gemeinschaft besteht darin, daß in beiden die Länge in's Entgegengesetzte übergeht oder die Curve von dem bisherigen Wege zurückkehrt. Alle 3 aber, Wendungspunkt, Spitze und Schnabel sind am schicklichsten mit dem allgemeinen Aus-

drucke Uebergangspunkte zu bezeichnen, weil in ihnen einer der Beſtandtheile oder beide in die Entgegenſetzung übergehen und weil eine alle drei zugleich umfaſſende Bezeichnung ſie ſogleich von merkwürdigen Punkten anderer Art unterſcheidet, z. B. von den mehrfachen Punkten, mit denen ſie, vermöge einer gänzlichen Verkennung ihrer Natur, von einigen Schriftſtellern in eine Kategorie geſtellt worden ſind.

§. 36.

Die Definition der vier eigenthümlichen Curvenpunkte iſt in Beziehung auf irgend einen anderen Punkt der Curve und irgend eine andere Richtung erfolgt, als die iſt, welche ſie in den 4 Punkten ſelbſt hat. Daraus kann man leicht ableiten, welche Bedingungen Statt finden, wenn man ſich in die 4 Curvenpunkte ſelbſt verſetzt. Es ſind genau die entgegengeſetzten. Man denke ſich, in Beziehung auf den Fortſchritt, nur eine gerade Linie und darin 3 Punkte, in der Folge a, b, c. Vom Punkte b aus läuft die Linie nach a und c in entgegengeſetzten Richtungen, vom Punkte a aus aber nach b und hindurch nach c in einer und derſelben, in unentgegengeſetzter Richtung. Verſetzt man ſich alſo

in den Punkt b ſelbſt, ſo findet von ihm aus ein entgegengeſetzter Fortſchritt Statt, verſetzt man ſich dagegen in einen andern, den Punkt a, ſo bleibt der Fortſchritt nach c hin in b unentgegengeſetzt. Eben das gilt für die Drehung. Man denke ſich von einem Scheitelpunkte ausgehend 3 verſchiedene Schenkel a, b, c, eines ebenen Winkels. Von der Richtung b aus muß man ſich nach a und c entgegengeſetzt drehen, von a aus aber nach c durch b in ſtets unentgegengeſetztem Fortgange.

Denkt man ſich alſo in den unterſuchten Punkten ſelbſt, und nimmt dieſelben Bedingungen, die man für dieſe Punkte unter der Vorausſetzung nahm, daß ſie im weiteren Laufe der Curve lägen, ſo folgen die 4 Punkte in umgekehrter Ordnung. Oder umgekehrt, nimmt man die entgegengeſetzten Bedingungen, ſo folgen ſie in derſelben Ordnung.

1.) Ein Punkt, von welchem aus ſowohl Fortſchritt als Drehung entgegengeſetzt werden, iſt ein gemeiner Curven-Punkt.

2.) Ein Punkt, von welchem aus der Fortſchritt entgegengeſetzt wird, die Drehung aber nicht, iſt ein Wendungspunkt.

3.) Ein Punkt, von welchem aus die Drehung

entgegengesetzt wird, der Fortschritt aber nicht, ist eine Spitze.

4.) Ein Punkt, von welchem aus sowohl Drehung als Fortschritt unentgegengesetzt laufen, ist ein Schnabel.

§. 37.

Um zu entscheiden, ob die sämmtlichen Punkte einer Curve gemeine sind oder ob sich Uebergangspunkte unter ihnen finden, muß also das Verhalten der Gleichung für jeden der beiden Bestandtheile in zweifacher Beziehung untersucht werden:

1.) Für die Länge.

a) Man versetzt sich durch die Annahme $s=0$ in den Anfangspunkt und untersucht, ob von da an für s bloß einstimmige (bloß positive oder bloß negative) Werthe, oder ob entgegengesetzte möglich sind. Dadurch wird über die Natur des Anfangspunktes entschieden. Im ersteren Falle ist er in Rücksicht auf den Fortschritt ein Uebergangspunkt, d. i. ein Rückkehrpunkt, im zweiten nicht. (§. 36, 3. und 4.) Es versteht sich, daß von je 2 zusammengehörigen Werthreihen oder Curven-

Armen immer daſſelbe Kriterium gilt, wenn die Linie vielarmig ſein ſollte.

b) Man erforſcht auf die §. 38 angegebene Weiſe, ob jeder vorhandene Arm der Linie verläuft, ohne wieder rückgängig zu werden, d. h. in den entgegengeſetzten Fortſchritt überzuſchlagen, oder nicht. Dadurch wird über alle Punkte, außer über den Anfangspunkt, entſchieden. Im erſteren Falle iſt unter ihnen kein Rückkehrpunkt, im letzteren Falle ſind deren eben ſo viele vorhanden, als Uebergänge in den entgegengeſetzten Fortſchritt vorkommen. (§. 35, 3. und 4.)

2.) Für die Drehung.

a) Von $w=0$ oder der Anfangsrichtung aus ſind für w entweder nur einſtimmige Werthe möglich: dann iſt der Punkt der Anfangsrichtung ein Uebergangspunkt in Rückſicht auf die Drehung, d. i. ein Wendungspunkt oder ein Schnabel; oder es ſind entgegengeſetzte Werthe möglich, dann iſt er keines von beiden. (§. 36. 2. und 4.) Finden ſich mehr als 2 Reihen von Werthen für w vor, ſo gilt daſſelbe, was unter 1., a bemerkt iſt.

b) Springt die bisher poſitive oder negative Drehung eines Armes wieder in die entgegen-

gesetzte über, so finden sich eben so viele Uebergangspunkte in Bezug auf die Drehung vor, als solche Uebergänge erfolgen. Im umgekehrten Falle sind solche Punkte im Laufe der Curve nicht vorhanden. (§. 35, 2. u. 4.)

Man muß hier wie bei 1, b wohl erwägen, daß solche Entgegensetzungen der Bestandtheile geometrisch vorkommen, ohne daß für die Punkte zunächst diesseit und jenseit des Ueberganges die Werthe in der Gleichung entgegengesetzte Vorzeichen erhielten. (Siehe folgenden §.)

§. 38.

Die Fragen 1., a und 2., a beantworten sich aus der Gleichung ohne Weiteres auf die gewöhnliche Weise; eine Reihe positiver oder eine Reihe negativer Werthe für den untersuchten Bestandtheil hat von 0 aus Statt, wenn der andere Bestandtheil für diese Voraussetzung reelle Werthe erhält. Giebt $s=0$ auch $w=0$, so fallen beide kleine Untersuchungen in eine einzige zusammen. Da dieser Umstand auch in anderer Rücksicht für die Analyse der Gleichung erleichternd ist, so thut man in der Regel wohl, ihn schon hier durch die §. 21

näher bezeichnete Umwandlung der Function herbeizuführen, wenn er sich nicht schon finden sollte.

Was die Beantwortung der Fragen 1., b und 2., b aus der Gleichung betrifft, so giebt man ihr für die erstere, wo s in Frage steht, die Form $w = f(s)$, für die letztere, wo w zu untersuchen ist, die Form $s = \varphi(w)$. Soll nun der fragliche Bestandtheil im Laufe der Curve geometrisch in das Entgegengesetzte übergehen, so setzt dieses voraus, daß höhere einstimmige Werthe in der Gleichung nicht mehr möglich sind, und die weiter erfolgenden einstimmigen wieder kleiner angenommen werden müssen oder durch angenommene höhere Werthe für den anderen Bestandtheil wieder kleiner ausfallen, also in Beziehung auf die früher höheren Werthe des untersuchten Bestandtheiles eine rückgängige Bewegung desselben fordern. Es muß demnach einen höchsten Werth für den Bestandtheil geben, einen positiven, sofern die untersuchte Reihe positiv, einen negativen, sofern sie negativ war, wenn ein Uebergang in die Entgegensetzung vorkommen soll. Man erhält dieses Maximum für s, indem man durch die gewöhnlichen Mittel aus der Function $w = f(s)$ findet, welches der höchste Werth für s ist, der einen möglichen

Werth für w giebt. Das Maximum für w ergiebt die Function $s = \varphi(w)$ auf ähnliche Art. Der für das Maximum gefundene Werth giebt in beiden Fällen die Lage des Uebergangspunktes an. Er kann sich unendlich oft wiederholen, unter leicht zu übersehenden Bedingungen.

Beispiele zu diesem einfachen Verfahren finden sich im folgenden Abschnitte.

Zweites Kapitel.

Methode, die Stärke der Krümmung einer Curve an jedem beliebigen Punkte oder das Gesetz der Krümmungsveränderung zu finden. Berechnung der Punkte der stärksten und schwächsten Krümmung, des Krümmungskreises und Krümmungshalbmessers. Bedingungen der Unwandelbarkeit der Gestalt einer Curve. Die Metamorphose der Gestalt.

§. 39.

Krümmung und Drehung dürfen nicht verwechselt werden. Die letztere bedeutet den stetigen Ue-

bergang der Richtung in eine andere, wobei unentschieden bleibt, ob damit ein Fortschritt (eine Längen- oder Flächen-Ausdehnung) verbunden ist oder nicht; Krümmung dagegen ist mit Ausdehnung verbundene Drehung.

Unter der Krümmung einer Linie versteht man demgemäß ihre beständige Abweichung von der während ihres Laufes angenommenen Richtung. Ist für dieselbe Länge eines Curvenstückes die Richtungsveränderung, d. i. der Winkel, den die Richtungslinien seiner Grenzpunkte bilden, größer oder kleiner, so nennt man die Krümmung dieses Bogens, im Ganzen genommen, stärker oder schwächer. Von zwei gleich langen Bogen ist also der am stärksten gekrümmt, dessen Richtungslinien den größten Winkel mit einander bilden. Ist z. B. der Bogen gk = Bog. kp (Fig. 1) und dabei ∠ n größer als ∠ m, so ist kp stärker gekrümmt, als gk. kp selbst aber kann an verschiedenen Stellen verschieden stark gekrümmt sein; theile ich diesen Bogen z. B. in 2 gleiche Theile, so ist in der Figur der Theil tp stärker gekrümmt, als kt. Aehnliches kann ferner eintreten, wenn tp wieder in kleinere Bogen zerlegt wird. Kurz, die kleinsten Theilchen einer Krummen können eine verschiedene Krüm-

mungsstärke haben, und man sieht sich zuletzt gezwungen, sich auf einen Punkt im Laufe der Curve zu beschränken und ihr an diesem irgend einen bestimmten Krümmungsgrad beizulegen. — Zur Bestimmung desselben führen folgende Betrachtungen.

§. 40.

Es sei für eine Krumme die gegenseitige Abhängigkeit der Länge und der Richtungsveränderung oder Drehung, wenn man diese vom Anfangspunkte und der Anfangsrichtung an rechnet, d. h. es sei die Gleichung der Curve gegeben. Man wünscht zu wissen, auf welche Weise die Länge eines beliebigen im Laufe der Curve genommenen Bogens von seiner Drehung abhängt und umgekehrt. Sei z. B. a (Fig. 1) der Anfangspunkt, so kennt man das erwähnte Gesetz für jeden von a aus gerechneten beliebigen Bogen z. B. für ag; man will dasselbe Gesetz für einen endlichen Zuwachs dieses Bogens z. B. für gk kennen lernen.

Die Untersuchung leitet sich am besten durch ein Beispiel ein. Die gegebene Gleichung sei $s^2 = w$. Es wachse nun der Bogen um das Stück Δs, so wächst auch die Drehung um eine gewisse Größe, die durch Δw bezeichnet werde. Setzt man also

für s, s + Δs, für w, w + Δw, so wird die Gleichung

$$s^2 + 2s \cdot \Delta s + (\Delta s)^2 = w + \Delta w.$$

Wird hiervon die anfängliche Gleichung $s^2 = w$ wieder abgezogen, so erhält man das gewünschte Abhängigkeitsgesetz

$$2s \cdot \Delta s + (\Delta s)^2 = \Delta w,$$

oder anders ausgedrückt:

$$2s + \Delta s = \frac{\Delta w}{\Delta s}.$$

§. 41.

Je kleiner in der letzten Gleichung Δs genommen wird, desto mehr nähert sich $\frac{\Delta w}{\Delta s}$ dem Werthe 2s. Läßt man Δs unendlich abnehmen, so nähert sich also $\frac{\Delta w}{\Delta s}$ unendlich dem Werthe 2s und ist daher ihm gleich zu setzen. Δs als eine unendlich kleine Größe verschwindet gegen 2s als eine endliche; aber Δs verschwindet nicht gegen Δw, weil auch dieses vermöge der Abhängigkeit beider mit Δw zugleich unendlich klein wird. $\frac{\Delta w}{\Delta s}$ hat also nun die endliche Größe 2s. — Für einen solchen Fall einer unendlichen Abnahme des Δs, Δw bezeichnet man diese Größen-Momente bekanntlich durch ds, dw und nennt sie die Differentiale

von s und w. Unsere obige Gleichung verwandelt sich daher unter Voraussetzung jener unendlichen Abnahme in diese

$$2s \,.\, ds = dw,$$

d. i. in die Differentialgleichung der anfänglichen, und wie in diesem Beispiele, so drückt überhaupt die Differential-Gleichung der Curve die Abhängigkeit aus, in welcher Fortschritt und Drehung eines unendlich kleinen Bogens stehen.

§. 42.

Aus der letzten Gleichung ist

$$2s = \frac{dw}{ds}.$$

Der Werth des Differential-Quotienten $\frac{dw}{ds}$, hier $2s$, heiße allgemein c.

Es fragt sich, welche geometrische Bedeutung dieser Differential-Quotient, oder, wie man ihn gewöhnlich nennt, das Differential-Verhältniß habe.

Beträgt für den Bogen Δs die Drehung Δw, so ist für die Einheit der Bogenlänge die Drehung $\frac{\Delta w}{\Delta s}$, wenn man sich die vielleicht ungleichmäßig vertheilte Drehung Δw über den Bogen Δs gleichmäßig vertheilt denkt. $\frac{\Delta w}{\Delta s}$ giebt also die Drehungsgröße für den Bogen $= 1$, bei gleichmäßiger Ver-

theilung derſelben über Δw. Es betrage z. B. für einen ungleichmäßig gekrümmten Bogen $= 7$ die Drehung 21°, ſo wäre $\frac{\Delta w}{\Delta s} = \frac{21°}{7} = 3°$, d. h. die Curve hat zwiſchen den beiden Grenzpunkten des Bogens $= 7$ eine Drehung, die für den Bogen $= 1$ im Durchſchnitt 3° beträgt. Läßt man nun Δs und mit ihm Δw unendlich abnehmen, ſo daß keinem von beiden mehr eine endliche Größe beigelegt werden kann, d. h. läßt man ſie zu ds und dw werden, ſo können dieſe beiden an und für ſich verſchwindenden Größen-Momente doch ein endliches Verhältniß zu einander haben, wie ſchon oben ein Beiſpiel zeigte, wo $\frac{dw}{ds} = 2s$ gefunden wurde. Noch ein anderes Beiſpiel ſtehe hier zur Erläuterung. Es ſei ein Bogen des Kreiſes $= 20$ und ſeine Drehung 40°. Da der Kreis die gleichmäßig gekrümmte Linie iſt, ſo beträgt die Drehung für jede Bogen-Einheit $\frac{40}{20}° = 2°$. Läßt man nun die Bogenlänge und mit ihr die Drehung, nach Maaßgabe des Abhängigkeitgeſetzes beider, alſo hier in gleichem Verhältniſſe, abnehmen, z. B. 4 und 8° werden, ſo ergiebt dieſes die Drehungsgröße für den Bogen $= 1$ nothwendig wie vorher, $\frac{8}{4}° = 2°$. Werden auch beide Beſtandtheile äußerſt klein z. B. $\frac{1}{10000}$ und entſprechend $\frac{2}{10000}°$: die Drehungsgröße für die Ein-

heit geht aus ihrem Verhältniß doch immer = 2° hervor. Mag nun auch der Bogen so wie seine Drehung unendlich abnehmen, d. h. sich der Grenze 0 unendlich nähern, ihr Verhältniß bleibt dasselbe, und wir werden sagen müssen, die Curve ist selbst für einen unendlich kleinen Bogen oder an einem Punkte so gekrümmt, wie ein Bogen = 1, über den 2° Drehung gleichmäßig vertheilt sind. — Es ist übrigens nur in diesem einzigen Beispiele, bei dem Kreise, der Fall, daß die Drehungsgröße für die Längen-Einheit des Bogens dieselbe (wie hier z. B. 2°) bleibt, man mag sie für einen größeren oder kleineren Bogen berechnen; in allen übrigen Fällen nähert sich diese Drehungsgröße unendlich einer bestimmten Zahl, wie hier 2°, und wird erst vollkommen solcher Grenzzahl gleich, wenn man den Bogen unendlich klein oder als Punkt denkt. Genug, daß unser Beispiel zeigt, wie $\frac{dw}{ds}$ eine endliche Größe sein kann.

Läßt man den Bogen und mit ihm die Drehung unendlich abnehmen, oder ersteren zu einem bloßen Punkte, letzteren zu einer bloßen einzelnen Richtung werden, so ist es dadurch erst möglich, von einer völlig bestimmten Stärke der Krümmung zu reden. Denn ist der Bogen noch endlich, wenn

auch äußerſt klein, ſo iſt er, bei ungleichmäßiger Krümmung, doch an verſchiedenen Punkten verſchieden ſtark gekrümmt, und man konnte nur behaupten, ſeine Krümmung im Ganzen genommen, ſei ſo, daß ſie bei gleichmäßiger Vertheilung über den äußerſt kleinen Bogen verhältnißmäßig für die Längen-Einheit, nach welcher der Bogen gemeſſen, ſo und ſo viel Grad betragen würde. An einem einzigen Punkte aber iſt die Krümmungsſtärke nur eine einzige, vollkommen beſtimmte.

Das Differential-Verhältniß $\frac{dw}{ds}$ beſtimmt alſo die Drehungsgröße, die, über die Länge $= 1$ gleichmäßig vertheilt, einen Kreisbogen gibt, deſſen Krümmung gleich der Krümmung der Curve an dem Punkte iſt, für welchen das Differential-Verhältniß berechnet worden. Mit andern Worten: dieſes ſagt aus, die Curve habe an dem betreffenden Punkte eine genau ſo ſtarke Krümmung, wie ein Kreisbogen $= 1$, deſſen Drehungsgröße $= c$, dem Werthe des Differential-Quotienten, iſt. $\frac{dw}{ds}$ bezeichnet alſo, wie ausdrücklich zu merken, eine abſolute Drehungsgröße, keine bloße Verhältnißzahl, und man kann alſo eigentlich hier nicht von einem Differential-Verhältniß, ſondern nur von einem Differential-Quotienten reden.

§. 43.

Die Bedeutung des umgekehrten Differential-Quotienten, $\frac{ds}{dw}$, liegt nun ebenfalls vor. $\frac{\Delta s}{\Delta w}$ würde die durchschnittliche Ausdehnung eines Bogens angeben, dessen Wendung die Drehungseinheit beträgt, daher $\frac{ds}{dw}$ die absolute Länge eines Bogens bei einer gleichmäßig darüber verbreiteten Drehungsgröße = 1, dessen Krümmung = der Krümmung der Curve an dem fraglichen Punkte ist.

Zur Aufstellung des Gesetzes, das die Veränderung der Krümmung bestimmt, und zur Vergleichung der Krümmungsgrade könnte man sich also auch des umgekehrten Differential-Quotienten bedienen. Es soll indeß $\frac{dw}{ds}$ gebraucht werden.

§. 44.

Da c stets die absolute Drehungsgröße für den Kreis-Bogen = 1 angiebt, der mit der Curve an dem untersuchten Punkte gleiche Krümmung hat, bei gleichen Kreis-Bogen aber die Krümmungsstärken sich wie die Drehungsgrößen vermöge des von den ersteren gegeben Begriffes verhalten, so verändert sich die Krümmungsstärke eben so wie c, das entweder von s oder von w abhängt. Giebt man

dem Differential-Quotienten selbst den Namen k (Krümmungsstärke), so liegt daher in der Gleichung

$$c = k$$

das Gesetz, nach welchem die Krümmungsstärke sich verändert, und zugleich der Ausdruck der Krümmungsstärke an jedem beliebigen Curvenpunkte, den man durch Setzung eines bestimmten Werthes für s oder w bestimmen möchte. Die Differentialgleichung in der Form $c = k$ soll die Krümmungsgleichung heißen.

§. 45.

Die gesuchte allgemeine Methode ist demnach folgende:

1.) Man bringe die für die Curve gegebene Gleichung auf die Form $f(s) = w$, wenn das Gesetz der Krümmungsveränderung durch die Abhängigkeit des Krümmungsgrades (k) von der Bogenlänge gefordert wird; will man es hingegen durch die Abhängigkeit des k von der Drehungsgröße bestimmt wissen, so ertheile man der Curvengleichung die Form $\varphi(w) = s$.

2.) Man differentiire die so gestaltete Gleichung und gebe der entstehenden Differential-Gleichung

die Form $o = \frac{dw}{ds} (= k)$, ſo iſt durch dieſe die Aufgabe gelöſt. Im Beiſpiele durch $2s = k$.

3.) Man kann übrigens jede der beiden Formen der Curvengleichung $f(s) = w$ und $\varphi(w) = s$ benutzen, mag man nun die Krümmungsgleichung durch s oder durch w beſtimmt wünſchen. Im Falle ſie nach der Differentiirung durch einen andern Beſtandtheil beſtimmt erſcheint, als man beabſichtigt, ſo drücke man dieſen vermittelſt der Curvengleichung durch den geforderten Beſtandtheil aus und ſchiebe dieſen in die Krümmungsgleichung. Soll z. B. in der Krümmungsgleichung $2s = k$ das k durch w beſtimmt werden, ſo rücke man wegen $s^2 = w$, $s = \pm\sqrt{w}$ in die Gleichung und man erhält $\pm 2\sqrt{w} = k$.

4.) Wünſcht man das Geſetz der Krümmungsveränderung in anderer Form, durch ein Gleichverhältniß unter zwei allgemein bezeichneten Krümmungsgraden und Functionen der Längen oder der Drehungen ausgedrückt, ſo ſetze man dieſelbe Krümmungsgleichung für einen zweiten allgemein durch s′ oder w′ bezeichneten Punkt der Curve, für welchen dann k′ die Krümmungsſtärke und c′ den durch w′ oder s′

ausgedrückten Werth derſelben bedeute. Die Proportion

$$k : k' = c : c'$$

leiſtet dann das Verlangte, nachdem c und c' mit den Werthen ſelbſt ausgewechſelt worden. c : c' giebt das Verhältniß der Krümmungsſtärken zweier beliebigen Punkte und ſoll das Krümmungsverhältniß heißen. Im Beiſpiele hat man $2s' = k'$, alſo

$$\frac{k : 2s = k' : 2s'}{k : k' = s : s'}$$

d. h. die Krümmungsgrade dieſer Curve verhalten ſich wie die Bogenlängen.

Dieſer Satz drückt nicht mehr ſo viel aus, als $k = 2s$; er hat einen Theil ſeines Gehaltes eingebüßt. Man kann nämlich aus ihm nicht mehr die abſolute Krümmungsſtärke beſtimmen. Dieſes gilt für das Krümmungsverhältniß überhaupt, ſobald es, wie gewöhnlich, durch Ausſcheidung gleicher Factoren abgekürzt iſt.

§. 46.

Aus der bisherigen Entwickelung ergiebt ſich die Methode, umgekehrt aus der Krümmungsgleichung die Curvengleichung zu finden. Man ſetze nur in

dieſer $\frac{dw}{ds}$ für k, integrire und füge die Conſtante hinzu, falls ſie beſtimmbar iſt. Dieſes Verfahren beſtimmt aus der Art und Weiſe, wie eine Curve ſich krümmen ſoll, dieſe ſelbſt.

§. 47.

Es iſt leicht, aus der Krümmungsgleichung die Punkte der ſtärkſten und ſchwächſten Krümmung zu ermitteln, und geſchieht, indem man auf gewöhnliche Weiſe die Werthe des Beſtandtheiles der Gleichung ſucht, für welche k ein Maximum und ein Minimum wird. Dieſe Unterſuchung im Verein mit der voranzuſchickenden erſten und einfachſten Analyſe der Krümmungsgleichung iſt auch ſonſt wichtig und überhaupt für die Erkenntniß der Krummen von Belang. Sie kommt z. B., wie ſchon bemerkt, bei der Claſſificirung in Frage. Wiederholt ſich das Maximum und Minimum der Krümmung unendlich oft, ſo iſt die Linie eine periodiſche ꝛc.

§. 48.

Durch die Krümmungsgleichung wird ein Kreisbogen von beſtimmter Krümmungsſtärke angegeben, da c ausdrückt, wie viel Drehungseinheiten gleichmäßig auf die Längen-Einheit vertheilt werden ſol-

len. Der Kreis, dem dieser Kreisbogen angehört, heißt der Krümmungskreis. Die einfachste Form der Kreisgleichung ist nach §. 30, 6.

$$a \,.\, S = W,$$

woraus $\frac{W}{S} = a$, d. h. auf eine Längeneinheit des Kreises fallen a Drehungseinheiten. Daher ist $a = c$ und daraus die Gleichung des Krümmungskreises

$$c \,.\, S = W,$$

wo S und W nach denselben Einheiten gemessen sind, wie s und w. Der Krümmungskreis der Curve $s^2 = w$ ist also

$$(2\,s)\,S = W,$$

und z. B. an dem Punkte der Curve $s = 7$

$$14\,S = W.$$

§. 49.

Der Quotient $\frac{S}{W}$ bezeichnet, wie viel Längeneinheiten einer Drehungseinheit zugehören. Die Zahl dieser Längeneinheiten steht mit der Größe des Kreises in geradem Verhältnisse. Nun folgt aus der Gleichung $c\,S = W$ die weitere

$$\frac{S}{W} = \frac{1}{c}.$$

Ebenſo viel mal ſo groß alſo c wird, ebenſo viel mal ſo klein $\frac{s}{w}$, d. i. die Krümmungskreiſe (alſo auch ihre Radien, die Krümmungshalbmeſſer) verhalten ſich umgekehrt, wie die Krümmungsſtärken.

Der umgekehrte Differentialquotient $\frac{ds}{dw}$ giebt alſo die Verhältnißzahlen für die Krümmungshalbmeſſer, oder das Geſetz, nach welchem ſie ſich verändern, an, ohne ihren abſoluten Werth zu beſtimmen.

§. 50.

So oft die in Graden ausgedrückte Größe der Drehungseinheit in 360° liegt, ſo oft enthält der Umfang eines Kreiſes die der Drehungseinheit angehörige Bogenlänge. Da nun dieſe letztere für den Krümmungskreis $= \frac{1}{c}$, ſo iſt, wenn der Umfang des Krümmungskreiſes K, und der Exponent, welcher durch die Diviſion der in Graden gegebenen Drehungseinheit in 360° entſteht, e genannt wird,

$$K = \frac{e}{c},$$

folglich der Krümmungshalbmeſſer

$$R = \frac{e}{2\pi c}.$$

Sei in unſerm Beiſpiele die Drehungseinheit $= 20°$, ſo iſt $e = 18$, daher $R = \frac{18}{4\pi . s}$. Für den

Punkt z. B. $s = 9$ ist also $R = \frac{1}{2\pi}$, nach der Längeneinheit von s gemessen.

Anmerkung. Aus der Gleichung für den Krümmungshalbmesser entsteht $c = \frac{e}{2\pi . R}$. Da c eine Function von s ist, so giebt dieser Ausdruck den Punkt, wo der Krümmungskreis liegt oder die Bogenlänge durch den Krümmungshalbmesser. Im letzten Beispiele ist $2s = \frac{18}{2\pi . R}$, also $s = \frac{9}{2\pi . R}$.

§. 51.

Ein Beispiel zur Berechnung des Krümmungsgesetzes und zur Vergleichung der Krümmungsgrade zweier Punkte mag diese Betrachtung schließen.

Durch Berechnung aus der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten findet sich weiter unten die ursprüngliche Gleichung der apollonischen Parabel:

$$s = \frac{p}{4}\left(\frac{\text{tg } w}{\cos . w} + \log . \text{nat. tg. } (45° + \tfrac{1}{2}w)\right).$$

Daraus ist durch Differentiation

$$ds = \frac{p}{2} \cdot \frac{dw}{\cos .^3 w}; \text{ und ferner}$$

$$\frac{2}{p} \cdot \cos^3 w = \frac{dw}{ds} =,$$

daher $k : k' = \cos .^3 w : \cos .^3 w'$, d. i. die Krümmungsstärken der gemeinen Parabel verhalten sich

§. 43.

Die Bedeutung des umgekehrten Differential-Quotienten, $\frac{ds}{dw}$, liegt nun ebenfalls vor. $\frac{\Delta s}{\Delta w}$ würde die durchschnittliche Ausdehnung eines Bogens angeben, dessen Wendung die Drehungseinheit beträgt, daher $\frac{ds}{dw}$ die absolute Länge eines Bogens bei einer gleichmäßig darüber verbreiteten Drehungsgröße $= 1$, dessen Krümmung $=$ der Krümmung der Curve an dem fraglichen Punkte ist.

Zur Aufstellung des Gesetzes, das die Veränderung der Krümmung bestimmt, und zur Vergleichung der Krümmungsgrade könnte man sich also auch des umgekehrten Differential-Quotienten bedienen. Es soll indeß $\frac{dw}{ds}$ gebraucht werden.

§. 44.

Da c stets die absolute Drehungsgröße für den Kreis-Bogen $= 1$ angiebt, der mit der Curve an dem untersuchten Punkte gleiche Krümmung hat, bei gleichen Kreis-Bogen aber die Krümmungsstärken sich wie die Drehungsgrößen vermöge des von den ersteren gegeben Begriffes verhalten, so verändert sich die Krümmungsstärke eben so wie c, das entweder von s oder von w abhängt. Giebt man

dem Differential-Quotienten selbst den Namen k (Krümmungsstärke), so liegt daher in der Gleichung

$$c = k$$

das Gesetz, nach welchem die Krümmungsstärke sich verändert, und zugleich der Ausdruck der Krümmungsstärke an jedem beliebigen Curvenpunkte, den man durch Setzung eines bestimmten Werthes für s oder w bestimmen möchte. Die Differentialgleichung in der Form $c = k$ soll die Krümmungsgleichung heißen.

§. 45.

Die gesuchte allgemeine Methode ist demnach folgende:

1.) Man bringe die für die Curve gegebene Gleichung auf die Form $f(s) = w$, wenn das Gesetz der Krümmungsveränderung durch die Abhängigkeit des Krümmungsgrades (k) von der Bogenlänge gefordert wird; will man es hingegen durch die Abhängigkeit des k von der Drehungsgröße bestimmt wissen, so ertheile man der Curvengleichung die Form $\varphi(w) = s$.

2.) Man differentiire die so gestaltete Gleichung und gebe der entstehenden Differential-Gleichung

dieſer $\frac{dw}{ds}$ für k, integrire und füge die Conſtante hinzu, falls ſie beſtimmbar iſt. Dieſes Verfahren beſtimmt aus der Art und Weiſe, wie eine Curve ſich krümmen ſoll, dieſe ſelbſt.

§. 47.

Es iſt leicht, aus der Krümmungsgleichung die Punkte der ſtärkſten und ſchwächſten Krümmung zu ermitteln, und geſchieht, indem man auf gewöhnliche Weiſe die Werthe des Beſtandtheiles der Gleichung ſucht, für welche k ein Maximum und ein Minimum wird. Dieſe Unterſuchung im Verein mit der voranzuſchickenden erſten und einfachſten Analyſe der Krümmungsgleichung iſt auch ſonſt wichtig und überhaupt für die Erkenntniß der Krummen von Belang. Sie kommt z. B., wie ſchon bemerkt, bei der Claſſificirung in Frage. Wiederholt ſich das Maximum und Minimum der Krümmung unendlich oft, ſo iſt die Linie eine periodiſche ꝛc.

§. 48.

Durch die Krümmungsgleichung wird ein Kreisbogen von beſtimmter Krümmungsſtärke angegeben, da c ausdrückt, wie viel Drehungseinheiten gleichmäßig auf die Längen-Einheit vertheilt werden ſol-

das Verhältniß. Im zweiten Falle möge die absolute Größe der Drehungseinheit für die erste Curve sich zu der für die zweite verhalten wie $f:1$. Dann ist der mit w ähnlich liegende Punkt $W = fw$, der mit w′ ähnlich liegende $W' = fw'$; man setzt diese Werthe ein und verfährt wie vorher. — Sind jedoch die von w, w′, W, W′ vorkommenden Functionen trigonometrische, so muß man den vier genannten Zahlen den Werth ihrer absoluten Einheiten unterschieben, also jedesmal gleiche absolute in Graden ausgedrückte Winkelgrößen für w und W, w′ und W′ setzen.

Beispiel. Die Krümmungsgrade der gemeinen Parabel verhalten sich wie die Würfel der Cosinus der Drehungswinkel (§. 51), also ist das Krümmungsverhältniß

$$\cos.^3 w : \cos.^3 w'.$$

Seien in einem andern derselben Gleichung angehörigen Curvenexemplare W und W′ ähnlichliegend mit w und w′, so ist die Bedingung der Aehnlichkeit

$$\frac{\cos.^3 w : \cos.^3 w' = \cos.^3 W : \cos.^3 W'}{\cos. w : \cos. w' = \cos. W : \cos. W'}.$$

Nimmt man gleiche absolute Größen der Drehungs-

Ebenso viel mal so groß also c wird, ebenso viel mal so klein $\frac{s}{w}$, d. i. die Krümmungskreise (also auch ihre Radien, die Krümmungshalbmesser) verhalten sich umgekehrt, wie die Krümmungsstärken.

Der umgekehrte Differentialquotient $\frac{ds}{dw}$ giebt also die Verhältnißzahlen für die Krümmungshalbmesser, oder das Gesetz, nach welchem sie sich verändern, an, ohne ihren absoluten Werth zu bestimmen.

§. 50.

So oft die in Graden ausgedrückte Größe der Drehungseinheit in 360° liegt, so oft enthält der Umfang eines Kreises die der Drehungseinheit angehörige Bogenlänge. Da nun diese letztere für den Krümmungskreis $= \frac{1}{c}$, so ist, wenn der Umfang des Krümmungskreises K, und der Exponent, welcher durch die Division der in Graden gegebenen Drehungseinheit in 360° entsteht, e genannt wird,

$$K = \frac{e}{c},$$

folglich der Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{e}{2\pi c}.$$

Sei in unserm Beispiele die Drehungseinheit $= 20°$, so ist $e = 18$, daher $R = \frac{18}{4\pi . s}$. Für den

$\cos. 10° : \cos. 15° = \cos. 10° : \cos. 15°$.

Uebrigens sieht man, wie die Aehnlichkeit aller apolloniſchen Parabeln aus der Proportion der Krümmung ſchon durch die bloße Bemerkung dargethan wird: w und W, w′ und W′ haben nach der Bedingung gleichen abſoluten Inhalt an Winkelgraden. Indeß iſt der eingeſchlagene Umweg gewählt, um ihn für Fälle, wo er nicht entbehrlich iſt, zu zeigen.

2. a) Wenn die Krümmungsverhältniſſe beider Curven durch Vermittlung der Bogen gegeben ſind, ſo ſeien zwei beliebige aber verſchiedene Punkte in der erſten durch s und s′ bezeichnet, die ähnlich liegenden in der andern durch S und S′. Nach dieſer Annahme würden alſo den Punkten s und S gleiche abſolute Drehungsgrößen von den Anfangspunkten aus angehören, ebenſo den Punkten s′ und S′ unter ſich. Man berechne die Größe der Drehung der Curven an den Punkten s, s′, S und S′ aus den Gleichungen, ſo beſitzt man ſowohl die Werthe von w und W als von w′ und W′. Nun hat man, wie unter (1), entweder $w = W$, $w' = W'$ oder $fw = W$, $fw' = W'$. Es finde das Eine oder das Andere Statt, ſo bilde man die beiden entſprechenden Gleichungen der Werthe. Dadurch erhält

man die ähnlich liegenden Punkte der zweiten Curve S, S′ durch die Punkte der ersten s, s′ ausgedrückt. Nachdem vermittelst dieser Ausdrücke S und S′ aus der Krümmungsproportion geschafft, prüft man ohne Weiteres ihre Richtigkeit.

2. b) Auch der Weg kann eingeschlagen werden, die Bogen in den Krümmungsverhältnissen durch die Winkel auszudrücken und darauf wie unter (1) zu verfahren.

Beispiel zu 2. a) Sind alle Exemplare der Curve $s = aw^2$ einander ähnlich?

Die Krümmungsstärke ist $\frac{1}{2r_{as}}$, also das Krümmungsverhältniß

$$\frac{1}{2r_{as}} : \frac{1}{2r_{as'}};$$

folglich die Bedingung, daß dieses gleich sei dem Verhältnisse

$$\frac{1}{2r_{AS}} : \frac{1}{2r_{AS'}}.$$

Aus dieser Proportion folgt

$$s' : s = S' : S.$$

Nun ist in den Punkten s′, s, S′, S die Drehung, nach Anleitung der gegebenen Gleichung

$$w' = r_{\frac{s'}{a}}, \quad w = r_{\frac{s}{a}},$$

$$W' = r_{\frac{s'}{A}}, \quad W = r_{\frac{s}{A}}.$$

Es seien die absoluten Größen der Drehungs-
nheit ungleich wie vorher, so daß $W' = fw'$,
$V = fw$, daher

$$f r_{\frac{s'}{a}} = r_{\frac{s'}{A}}, \quad f r_{\frac{s}{a}} = r_{\frac{s}{A}}.$$

$$\frac{A}{a} f^2 . s' = S', \quad \frac{A}{a} f^2 . s = S.$$

Durch Einschiebung dieser Werthe für S' und S
i die letzte Proportion entsteht

$$s' : s = s' : s.$$

Also sind alle Erscheinungen dieser Curve gleichge-
altig.

Anmerk. Dieses Ergebniß findet sich bei wei-
m leichter auf dem Wege 2, b. (Siehe §. 69, V.)

Beispiel zu 2. b) Haben alle der Gleich-
ng $w = as^2$ angehörige Curven-Exemplare dieselbe
estalt oder nicht?

Die Krümmungsstärke ist (nach §. 67, III) $2as$,
aher das Krümmungsverhältniß zweier Punkte

$$s : s'.$$

Sei die Gleichung eines zweiten Exemplares

$$W = AS^2,$$

) ist die Krümmungsstärke $2AS$, daher das Krüm-
mungsverhältniß

$$S : S'.$$

Also ist, wenn s und S, s′ und S′ ähnlich liegende Punkte bedeuten, die Bedingung der Aehnlichkeit

$$s : s' = S : S'.$$

Hieraus entsteht durch Auswechselung der Bogen mit den Winkeln

$$\frac{r^{\frac{w}{a}} : r^{\frac{w'}{a}} = r^{\frac{w}{A}} : r^{\frac{w'}{A}}}{w : w' = W : W'.}$$

Bei ungleichen absoluten Größen der Drehungseinheit wie unter (1)

$$\frac{w : w' = fw : fw'}{w : w' = w : w';}$$

wodurch die Frage bejaht ist.

§. 54.

Der Begriff der Form einer ebenen Curve läßt sich nach dem Gesagten so fassen. Die Gestalt ist die Krümmungsweise. Diese ist durch das Krümmungsverhältniß bestimmt. Ist dieses selbst unveränderlich, d. h. von willkührlichen, beständigen Größen unabhängig, so ist die Krümmungsweise der Curve unter allen Bedingungen dieselbe. Um daher zu prüfen, ob eine Curve ihre Gestalt wandle oder nicht, darf man nur die allgemeinen beständigen Größen des Krümmungsverhältnisses mit andern

auswechſeln, und die abſolute Drehungseinheit ändern, d. h. ſtatt w, w' ſetzen fw, fw', und unterſuchen, ob dadurch das Verhältniß verändert wird oder nicht. Im letzten Falle hat die Curve nur eine einzige Geſtalt.

Auch die verſchiedenen Arten bloßer Verwandtſchaft der Geſtalt laſſen ſich durch weitere Beleuchtung und Verfolgung der hier entwickelten Grundidee in ein förmliches Syſtem bringen. Die Auffaſſung des ganzen Fluſſes von Geſtalten, die eine geſtaltwandelnde Curve annimmt, kann nach Anleitung der Bedingungen geſchehen, unter welchen ſich die Krümmungsproportion von der Wahrheit entfernt oder ihr ſich nähert. Ich gebe unten ein ausführliches Beiſpiel. Eine ſolche Theorie der Metamorphoſe der Geſtalt forſcht den Bedingungen nach, unter welchen die Verwandlung aller mathematiſch geſetzmäßigen Bildungen des Geiſtes und der Natur erfolgen, und unterwirft ſie dadurch auf dem einfachſten Wege der Macht der Erkenntniß.

Drittes Kapitel.

Bedingungen der Convexität und Concavität.

§. 55.

Durch eine ebene Linie, sie sei endlich oder unendlich, wird die Ebene, in welcher sie liegt, theilweise oder ganz begrenzt; wobei als hier gleichgültig unberücksichtigt bleibe, ob diese Grenze zugleich eine in sich zurückkehrende, also ein endliches Stück der Ebene völlig einschließende sei, oder nicht. Die Grenze selbst nun kann eine Binnengrenze oder eine Außengrenze sein. Verunendlicht man indeß im letzten Falle die Ebene, so wird auch die Außengrenze zur Binnengrenze. Alle ebene Linien oder Theile von ihnen sind also Binnengrenzen unendlicher Ebenen. Eine Binnengrenze zerlegt in Theile. Man kann also in Beziehung auf eine Linie in der Ebene stets zwei Theile der letzteren unterscheiden, welche ihre beiden Seiten, oder auch, insofern diese sich in der Linie berühren, die Seiten der Linie selbst genannt werden. Diese Unterscheidung gilt jedoch nur für den Verlauf der Linie. Wo diese aufhört,

endet die Begrenzung und damit auch das Dieſſeits und Jenſeits.

Auch die gerade Linie hat alſo zwei Seiten. Aber dieſe ſind durch nichts unterſchieden, weil der Geraden, kraft ihres Begriffes, Richtungsveränderung fehlt. Auf dieſer lediglich beruht die Unterſcheidung von Convexität und Concavität. Eine gerade Linie iſt daher an der einen wie an der andern Seite weder convex noch concav, es mangelt die Baſis des Begriffes und daher der Begriff ſelbſt. Sie ſtellt die Indifferenz beider dar und kann plan genannt werden, ſo wie die Ebene in Beziehung auf gebogene Flächen.

Man denke ſich einen Bogen einer Krummen, deſſen Drehung ſtets nach derſelben Seite gehe und nicht über 180° betrage. Dieſer ſei gleich einem Faden biegſam, und man vermindere ſeine Krümmung immer mehr, bis eine Gerade entſtanden iſt. Nun beginne dieſe ſich von neuem zu krümmen, aber nach der andern Seite, ſo daß die vorher concave Seite des Bogens die convexe wird, und umgekehrt. Hier bildete die gerade Form den Uebergang des Concaven in's Convexe, wenn man nicht an einen einzelnen Punkt der Linie, ſondern an ihren ganzen Verlauf denkt. Dieſe Bemerkung iſt geeignet, das

Verhältniß der Geraden zur Krummen in Beziehung auf Convexität und Concavität anſchaulich zu machen, weshalb ich vorgriff, da die in Rede ſtehenden Begriffe ſelbſt erſt jetzt folgen.

§. 56.

Indem eine Curve fortzuſchreiten und ihre Richtung zu verändern anfängt, wendet ſie ſich nach der einen oder der andern Seite der Anfangsrichtung, d. h. ſie dreht ſich poſitiv oder negativ. Auf die eine oder die andere Weiſe muß ſie in Beziehung auf die Richtung, die ſie in irgend einem Punkte hat, fortfahren. Man nennt nun an irgend einem Punkte der Curve diejenige Seite derſelben, auf welcher das beliebig kleine Anfangs-Stück der Richtungslinie dieſes Punktes liegt, die convexe, die andere die concave Seite.

Die dem erſten, beliebig kleinen Theile der Richtungslinie zugekehrte Seite iſt alſo im Punkte der Richtungslinie die convexe, die abgewandte die concave.

§. 57.

Soll der gegebene Begriff völlig klar erſcheinen, ſo darf nicht außer Acht gelaſſen werden, daß, ſtreng genommen, die Curve in jedem Punkte zwei ver-

ſchiedene einander gerade entgegengeſetzte Richtungslinien hat: die eine, ſofern man den Punkt als Grenzpunkt des einen von ihm auslaufenden Aſtes, die andere, ſofern man ihn als Grenzpunkt des anderen Aſtes betrachtet. Dieſes liegt im Begriff der Richtungslinie, als einer geraden Linie, welche die Richtung ausdrückt, die die Curve während ihres Laufes, bei ſtetiger Drehung, in irgend einem Punkte hat; wobei es alſo darauf ankommt, ob man den Lauf der Curve vorwärts oder rückwärts verfolgt. Dieſe Zweiheit der Richtungslinie für einen und denſelben Punkt kann nicht ſeltſam erſcheinen, denn man ſpricht nie von der Richtung eines Punktes, ſondern immer von der Richtung der Curve in einem ihrer Punkte. — In Fig. 8 z. B. iſt die Richtungslinie der von f nach a fortgehenden Krummen im Punkte a die Gerade ab; ac dagegen nur die Rückwärts-Verlängerung derſelben. Für den von d nach a gehenden Bogen iſt dagegen für denſelben Punkt die Richtungslinie ac, ab dagegen die Verlängerung. Wie in dieſem Beiſpiele, ſo bildet überall die eine Richtungslinie die Verlängerung der andern, und da man die Linie ebenſowohl ſo als ſo herum zu verfolgen berechtigt iſt, ſo bilden beide Richtungslinien ein Gan-

ges, das man mit dem Namen der Tangente belegt. Daß übrigens dieſe ſtets eine Gerade iſt, d. h. daß beide Richtungslinien ſtets einander gerade entgegengeſetzt ſind, ſieht man leicht: denn bildeten ſie einen ſchiefen oder rechten Winkel, ſo machte damit die Curve in einem bloßen Punkte, alſo ohne fortzuſchreiten, eine endliche Drehung, welches dem Begriffe der Krummen, nach welchem ſie nur im Fortſchreiten ſich drehen ſoll, geradezu widerſpricht.

Man darf bei der Beſtimmung der Richtungslinie eines Punktes nicht von dieſem ſelbſt (wie von einem Anfangspunkte) nach zwei verſchiedenen Richtungen zugleich ausgehen, oder von zwei anderen vor und hinter ihm liegenden Punkten zugleich ſich nach jenem hinbewegen: denn in beiden Fällen ſchreitet man entgegengeſetzt fort. Vielmehr muß die angenommene Weiſe feſtgehalten, von einem Punkte dieſſeit des fraglichen Punktes nach einer Richtung hin der Lauf verfolgt, und darauf abgeſondert anders herum von einem Punkte jenſeit des fraglichen Punktes die Linie durchlaufen werden. Dann erhält man zuerſt die eine, darauf die andere Richtungslinie für den Punkt.

Auf welcher Seite der Curve übrigens die Richtungslinie liegt, geht immer unzweideutig hervor, wenn man die letztere rückwärts verlängert.

§. 58.

1. Iſt der Punkt, an welchem eine Curve in Beziehung auf Convexität und Concavität unterſucht werden ſoll, ein gemeiner Curvenpunkt, ſo iſt die Linie in dieſem Punkte auf der einen Seite convex, auf der andern concav, man mag ihren Lauf hin oder her verfolgen. Denn die von dieſem Punkte ausgehenden Anfangsſtücke beider Richtungslinien, oder, was daſſelbe ſagt, die eine der beiden Richtungslinien und ihre rückwärtslaufende Verlängerung liegen auf derſelben Seite der Krummen, weil die Drehung zunächſt vor und zunächſt hinter dem fraglichen Punkte nach derſelben Seite hin, ohne Entgegenſetzung, erfolgt. In einem gemeinen Curvenpunkte geht alſo auch die Convexität oder Concavität nicht auf die andere Seite der Curve über, ſondern beharrt auf einer und derſelben.

2. Ein anderes Ergebniß erhält man für einen Wendungspunkt. Da in ihm die Drehung die entgegengeſetzte wird, ſo wendet ſich die Curve, nach dem Begriffe dieſer Entgegenſetzung, auf die andere

Seite der Richtungslinie dieſes Punktes. Verlängert man dieſe alſo rückwärts, ſo wird ſie in dem Punkte ſelbſt von der Curve und die Curve von ihr geſchnitten. Die Richtungslinie des einen von dem Punkte ausgehenden Curven-Aſtes liegt alſo auf dieſer, die des andern auf jener Seite der Krummen. Verfolgt man alſo den Lauf der Curve hinwärts, ſo iſt ſie in demſelben Punkte auf derſelben Seite convex, in dem ſie, herwärts verfolgt, concav iſt, oder umgekehrt. In einem Wendungspunkte iſt daher die Curve auf der einen wie auf der andern Seite ſowohl concav als convex, je nachdem man dieſen Punkt als Durchgangspunkt des einen oder des andern Aſtes betrachtet. In Fig. 4 z. B. iſt cd die Richtungslinie des von a nach c gezogenen Bogens im Punkte c; ſie liegt auf der oberen Seite der Curve, alſo iſt dieſe die convexe im Punkte c. Dieſer wurde hierbei als Grenzpunkt oder Durchgangspunkt des Bogens ac angeſehen. Hingegen iſt dieſelbe Seite die concave, ſobald man c als Grenzpunkt des Bogens fc denkt, weil dann die Richtungslinie ce iſt und dieſe an der andern Seite der Krummen liegt. — Es iſt hier ein ähnlicher Fall wie bei einer arithmetiſchen

Progreſſion, die von 0 aus nach beiden Seiten in's Unendliche läuft, z. B.:

.... 4, 3, 2, 1, 0, - 1, - 2, - 3, - 4, ...

Das Nichts an ſich iſt zwar weder poſitiv noch negativ, aber als Grenze der poſitiven Reihe habe ich Recht, es als ein Geſetztes, als Grenze der negativen, es als ein Entgegengeſetztes zu betrachten. Wie in jedem Uebergangs-Momente von Entgegengeſetzten zwei widerſtreitende Begriffe durch wechſelſeitigen Austauſch ihrer Elemente zugleich beſtehen und ſich aufheben, je nachdem man dieſen Moment als gemeinſchaftliche Grenze zweier Entgegengeſetzten, was er doch iſt, anſieht, oder ihn abſolut, ohne Beziehung auf frühere oder ſpätere Momente betrachtet (welches, wenn dieſe letztern vorhanden gedacht werden, unzuläſſig iſt): ſo verhält es ſich auch hier mit der Convexität und Concavität. Der einfachſte Ausdruck der Sache iſt, daß ſich in dem Wendungspunkte auf jeder Seite der Curve ſowohl die Grenze der Convexität als die der Concavität befindet. Hiermit wird man allgemein einverſtanden ſein, und es iſt dadurch zugleich ein ſolcher Punkt als Uebergangspunkt der Convexität in die Concavität, auf jeder der beiden Seiten der Curve bezeichnet.

Uebrigens wird es den Bewanderten nicht befremden, wenn ein so einfacher Gegenstand eine so weitläuftige Discussion veranlaßt; man wird sich an ähnliche Fälle erinnern, wo der Begriff der Grenze, überhaupt der feinste und wichtigste der ganzen Mathematik, den Forscher zu verweilen zwang.

3. Da in einer Spitze die Drehung unentgegensetzt bleibt, so fallen beide Richtungslinien auf dieselbe Seite der Curve; die eine ist auch hier, wie immer, die Verlängerung der andern. In einem solchen Punkte ist daher die Curve auf der einen Seite convex, auf der andern concav, und zwar das Letztere an der Außenseite der Spitze, da die eine Richtungslinie nothwendig nach der Innenseite, zwischen beide Curvenäste fällt. In Fig. 5 stellt cd die Richtungslinie des Bogens ac, ce die von cf im Punkte c dar, in welchem die Curve concav an der rechten, convex an der linken Seite ist. Es findet an einem solchen Punkte kein Uebergang der Convexität in die Concavität oder umgekehrt Statt.

4. In einem Schnabel sind abermals die Richtungslinien Verlängerungen von einander, liegen aber dennoch, aus demselben Grunde wie unter 2., auf verschiedenen Seiten der Curve, welches hier

dadurch geſchieht, daß die beiden Aeſte den Richtungslinien verſchiedene Seiten zuwenden, der eine die Außenſeite, der andere die Innenſeite. Alſo iſt, ebenſo wie bei einem Wendungspunkte, im Schnabelpunkte ſowohl auf der einen als auf der andern Seite der Curve die Grenze ihre Convexität und Concavität, die eine geht in die andere über. In Fig. 6 iſt cd die Richtungslinie des Bogens ac, ce die des Bogens cf im Punkte c. Der Bogen ac iſt im Punkte c auf der äußern Seite (nach oben) convex, der Bogen fc in demſelben Punkte auf derſelben, der äußern Seite (nach unten) concav.

§. 59.

Verſetzt man ſich in die unendlich gedachten Richtungslinien eines gemeinen Curvenpunktes, ſo entfernt ſich die Curve, vermöge ihrer Drehung in ihrem erſten Verlaufe mit beiden Aeſten von der Tangente, und ſchließt dadurch einen Theil derjenigen unendlichen Ebene aus, die nach der Seite der Richtungslinie ſich erſtreckt, auf welcher die Krumme liegt. Hingegen ſchließt dieſe auf ihrer andern Seite einen Theil derſelben unendlichen Ebene ein. In Fig 8 z. B. iſt der Raum zwiſchen bc

und daß von der Curve ausgeſchloſſen, ſie wendet ſich von dieſem Theile der Ebene ab, kehrt ihr den Rücken (die convexe Seite) zu. Der zwiſchen d, f und a liegende Theil der Ebene wird hingegen von der Curve an einer Seite eingeſchloſſen. — Daſſelbe läßt ſich in Bezug auf die Curve ſo ausdrücken: die Aeſte eines beliebig kleinen Bogens ohne Uebergangspunkt neigen ſich auf einer Seite deſſelben einander zu, auf der andern von einander ab; im Gegenſatz von der geraden Linie, deren Aeſte ſich nach dieſer oder jener Seite weder einander zu, noch von einander abneigen. In dieſer Ausſchlieſſung des Raumes und der gegenſeitigen Abneigung der Curvenäſte nach der einen Seite und der Einſchließung des Raumes und der Gegeneinanderneigung der Aeſte nach der andern Seite liegt die Erſcheinung des Erhobenen und Hohlen oder Convexen und Concaven, und man ſieht, daß dieſe Namen der Anſchauung vollkommen entſprechen. Auch fällt mit dieſer der gegebene Begriff zuſammen; denn auch er bezieht ſich nicht bloß auf einen einzelnen Punkt, ſondern, indem er über ihn entſcheidet, auf eine ſtetige Reihe derſelben, da er beſtimmt, ob dieſe zunächſt dieſſeit oder jenſeit der Richtungslinie liegen ſoll.

§. 60.

Man fragt oft danach, ob eine Curve in irgend einem Punkte ihres Laufes einer der Lage nach gegebenen Geraden die convexe oder concave Seite zukehre, und thut dieselbe Frage auch wohl in Beziehung auf eine zweite Krumme, oder auf zwei Bogen einer und derselben Curve. Da diese letzte Frage eine absolute Eigenschaft der Curve betrifft, so müssen die Bedingungen der Bejahung oder Verneinung derselben hier zur Sprache kommen.

1. Bedingungen in Beziehung auf eine der Lage nach gegebene Gerade. Man ziehe die Richtungslinie des Curvenpunktes, denn dieser muß gegeben sein, wenn nicht die Frage in vielen Fällen eine unbestimmte sein soll, da derselben Geraden die Curve in dem einen ihrer Punkte die convexe, in dem andern die concave Seite zuwenden kann. Ist zuerst die Untersuchung für einen einzelnen Curvenpunkt geführt, so kann sie auf eine stetige Reihe von Punkten, d. i. auf einen Bogen oder die ganze Curve ausgedehnt werden.

Die Richtungslinie läuft entweder parallel mit der Geraden oder nicht.

a) Im erſten Falle kehrt der Geraden nach ihrem ganzen Verlaufe die Curve in dem betreffenden Punkte,

α) im Falle er ein gemeiner Curvenpunkt iſt, die convexe Seite zu, wenn die beliebig klein genommenen Anfangsſtücke beider von dem Fragepunkte ausgehende Aeſte der Curve außerhalb der Parallelen liegen, die concave dagegen, wenn ſie innerhalb liegen. In Fig. 13 z. B. wendet die Curve im Punkte a der bc in allen ihren Punkten die convexe, der df in allen ihren Punkten die concave Seite zu.

β) im Falle er ein Wendungspunkt iſt, (wobei immer ein Anfangsſtück außerhalb der Parallelen, das andere innerhalb liegt) ſowohl die convexe als die concave Seite, nämlich die Grenze von beiden zu. In Fig. 14 z. B. wendet im Punkte a der Bogen ha der df die concave, der Bogen ga die convexe Seite zu. Aehnlich in Beziehung auf bc.

γ) im Falle er eine Spitze iſt, wie unter β), nur mit dem Unterſchiede, daß dort die zugleich hergewandte concave und convexe Seite

auf derſelben Seite, hier aber auf verſchiedenen Seiten der Curve liegen. Im Punkte a Fig. 15 kehrt z. B. die Krumme in Beziehung auf den Bogen ha der df ihrem ganzen Verlaufe nach die concave, in Beziehung auf den Bogen ga desgleichen die convexe Seite zu.

δ) im Falle er ein Schnabel iſt, die convexe Seite zu, wenn beide Anfangsſtücke außerhalb der Parallelen liegen, die concave, wenn innerhalb. In Fig. 16 z. B. kehren beide Aeſte der Curve in a der bo die convexe, der df die concave Seite zu.

b) Im zweiten Falle verlängere man die Richtungslinie bis ſie die Gerade trifft, ſo entſtehen Nebenwinkel auf der Baſis der gegebenen Geraden, deren gemeinſamer Schenkel die Richtungslinie iſt.

α) Der Fragepunkt ſei ein gemeiner Curvenpunkt. Demjenigen einzelnen Punkte der gegebenen Geraden, den die Richtungslinie trifft, kehrt die Curve im Fragepunkte ſowohl die convexe als die concave Seite zu; demjenigen Theile der Geraden, zwiſchen dem

und der Richtungslinie die beliebig kleinen Anfangsstücke der Curve liegen, die concave Seite, dem andern Theile die convexe. Im Punkte a z. B. wendet die Curve Fig. 17 dem Punkte k sowohl die convexe als concave Seite, der kb die erstere, der kc die letztere zu.

β) Ist der fragliche Punkt ein Wendungspunkt, sowohl die convexe als die concave, und zwar gilt dies im Schneidepunkte k der Geraden und der Richtungslinie für beide Aeste der Curve zugleich. (Fig. 18.) Dem Theile der Geraden rechts vom Treffpunkte (kb) kehrt der eine Ast im Punkte a die concave, der andere die convexe Seite, dem Theile links (kc) der zuerstgenommene Ast umgekehrt die convexe, der andere die concave Seite zu.

γ) Ist der fragliche Punkt eine Spitze, so sind die Bedingungen wie unter β, nur wieder mit dem Unterschiede, daß dort die zugleich hergewandte convexe und concave Seite auf derselben Seite, hier aber auf verschiedenen Seiten der Curve liegen. (Fig. 19.)

δ) Wenn der fragliche Punkt ein Schnabel ist, so kehrt die Curve in diesem Punkte demjenigen Punkte der Geraden, den die Richtungslinie trifft, sowohl die convexe als die concave Seite zu; demjenigen Theile der Geraden, zwischen dem und der Richtungslinie die Anfangsstücke liegen, die concave, dem andern die convexe. (Fig. 20.)

2. Will man untersuchen, ob eine Curve in einem bestimmten Punkte einer andern Curve in einem ebenfalls bestimmten Punkte, oder auch derselben in einem andern Punkte die convexe oder die concave Seite zuwende, so ziehe man die Richtungslinien beider Punkte, und sehe die an den letzteren Punkt gezogene als die (unter 1) gegebene Gerade an. Wie sich die erstere Krumme rücksichtlich der Zuwendung ihrer convexen oder concaven Seite gegen denjenigen Punkt der Geraden verhält, in welcher diese die zweite Krumme oder den zweiten Bogen derselben Curve berührt, ebenso verhält sie sich gegen die letztere selbst, im Berührungspunkte. Hierdurch ist die Entscheidung über diese Frage auf die Untersuchung der unter 1 aufgestellten Bedingungen zurückgeführt.

§. 61.

Nach den aufgestellten Bedingungen entscheidet sich leicht das Verhalten der beiden von einem der 4 eigenthümlichen Curvenpunkte ausgehenden beliebig kleinen Curvenäste in Beziehung auf deren gegenseitige Zu- oder Abwendung der Convexität und Concavität.

1. die beiden von einem gemeinen Curvenpunkte ausgehenden beliebig kleinen Anfangsstücke der Krummen kehren einander die concave Seite zu. Denn die Richtungslinien beliebig nahe liegender Punkte eines Bogens ohne Uebergangspunkte schneiden sich, gehörig verlängert, nothwendig außerhalb der Curve, fassen diese also zwischen sich (§. 60, 1, b, a). Der Grund dauert fort, so lange die Curve ohne Uebergangspunkte bleibt und die Drehung nicht über 180° beträgt. So lange findet also auch die Folge Statt.

2. Die beiden beliebig kleinen Anfangsäste eines Wendungspunktes, für gleich große Drehung dieser Anfangsäste, die concave.

3. Die Anfangsäste einer Spitze kehren sich ge-

genſeitig die convexe Seite zu. Dieſes dauert, wenn kein neuer Uebergangspunkt eintritt, aus ähnlichen Gründen wie unter 1, fort, bis einer der Aeſte die Drehung von 90° überſchreitet.

4. Von den Anfangsäſten eines Schnabels drehet der eine dem andern die concave, dieſer jenem die convexe Seite zu.

Fünfter Abschnitt.

Bestimmung der absoluten Eigenschaften einzelner Curven.

Erstes Kapitel.

Die Kreislinie.

§. 62.

Die einfachste Form der Kreisgleichung ist nach §. 30, 6,

$$w = a \cdot s,$$

wo vorläufig a sowohl positiv als negativ gewählt werden kann, ohne daß dadurch mehr als verschiedene Lagen des Kreises bezeichnet würden. Da aber hier die Linie lediglich in Beziehung auf sich selbst betrachtet werden soll, so ist die Beschränkung: a sei positiv, ohne Nachtheil für die Allgemeinheit der Betrachtung.

I. Lauf im Allgemeinen.

1. Für $s=0$ ist $w=0$: die Curve hat im Anfangspunkte die Anfangsrichtung. (ab, Fig. 8.)
2. Jeder positive Werth für s ergiebt einen positiven, und zwar nur einen einzigen für w: ein Arm der Curve erstreckt sich vom Anfangspunkte positiv mit positiver Drehung (ad).
3. Negative Werthe für s geben negative für w, und zwar ein negativer für den Fortschritt nur einen einzigen negativen für die Drehung: ein zweiter und letzter Arm der Curve erstreckt sich vom Anfangspunkte aus negativ mit negativer Drehung (af).
4. Gleich großen positiven und negativen Werthen für s entsprechen gleich große positive und negative Werthe für w: beide Arme der Curve sind identisch.
5. Je größer s, positiv oder negativ, desto größer, positiv oder negativ, fällt w aus; $s=\infty$ giebt $w=\infty$: die Arme der Curve wachsen in's Unendlich-Große und mit ihnen ihre Drehung.

II. Uebergangspunkte.

1. Vom Anfangspunkte aus erstrecken sich die Fortschritte entgegengesetzt und die Drehungen

Fünfter Abschnitt.

Bestimmung der absoluten Eigenschaften einzelner Curven.

Erstes Kapitel.

Die Kreislinie.

§. 62.

Die einfachste Form der Kreisgleichung ist nach §. 30, 6,

$$w = a \cdot s,$$

wo vorläufig a sowohl positiv als negativ gewählt werden kann, ohne daß dadurch mehr als verschiedene Lagen des Kreises bezeichnet würden. Da aber hier die Linie lediglich in Beziehung auf sich selbst betrachtet werden soll, so ist die Beschränkung: a sei positiv, ohne Nachtheil für die Allgemeinheit der Betrachtung.

gend, denn in jedem Punkte iſt die Krümmung ſo klein, daß ſie an keinem andern Punkte weniger beträgt. — Daher iſt auch überall und nirgend der Punkt der kleinſten Krümmung.

V. Krümmungsverhältniß. Metamorphoſe der Curve.

Da $k = a$ (III), ſo iſt

$$k : k' = a : a = 1 : 1.$$

Das Krümmungsverhältniß iſt daher gänzlich unabhängig von beſtändigen Größen, daher die Weiſe der Krümmung nur eine einzige: die Curve hat alſo unter allen Bedingungen eine und dieſelbe Geſtalt, alle Kreiſe ſind einander ähnlich (§. 54).

Die Metamorphoſe der Curve betrifft alſo nur ihre Größe.

Die abſolute Größe hängt zunächſt von dem Verhältniß der abſoluten Größen ab, die man als Einheit der Länge und Einheit der Drehung ſetzt. Je kleiner für dieſelbe Länge die Drehung oder je größer für dieſelbe Drehung die Länge genommen wird, deſto größer die Curve. Da das genannte Verhältniß alle Werthe von 0 bis ∞ annehmen kann, ſo beſteht die Metamorphoſe des Krei-

ſes im Ausgehen von der unendlichen Kleinheit, Durchlaufen jeder möglichen Größe und Erweiterung derſelben bis in's Unendlichgroße.

Für ein und daſſelbe Verhältniß dieſer abſoluten Größen hängt die Größe der Curve ferner von a ab. Da k die Drehungsgröße für den Bogen = 1 angiebt (§. 42), hier aber k = a, ſo iſt der Kreis deſto kleiner, je größer a, oder die Kreiſe verhalten ſich ihrer Größe nach umgekehrt, wie die Werthe, die man dem beſtändigen Coefficienten von s für verſchiedene Fälle ertheilt.

VI. Selbſtbedeckung.

Verlegt man durch Behandlung der Kreisgleichung den Anfangspunkt und die Anfangsrichtung an einen und denſelben beliebigen Punkt der Curve, ſo erhält man, dieſer Punkt liege wo er wolle, ſtets dieſelbe Gleichung wieder. Es werde der Anfangspunkt zuerſt um b vorgeſchoben, ſo muß, wenn die neue Anfangsrichtung mit dem neuen Anfangspunkte in denſelben Punkt fallen ſoll, die frühere um ſo viel vorwärts gelegt werden, als es dem Fortſchritte der Länge gemäß iſt. Giebt man aber in der Gleichung w = as dem Fortſchritte den Werth b, ſo erhält man w = ab. Man ſetzt alſo $s' = s + b$

und $w' = w + ab$, daher $s = s' - b$, $w = w' - ab$ in die Gleichung und erhält dadurch die Gleichung für die Curve von dem neuen beliebigen Anfangspunkte aus:

$$\frac{w' - ab = a(s' - b)}{w' = as'}.$$

Werden Anfangspunkt und Anfangsrichtung zurückgerückt, so ist für diesen Fall $s = s' + b$, $w = w' + ab$, daher abermals

$$w' = as'.$$

Von allen ihren Punkten aus hat also die Curve einen und denselben Verlauf, eine Eigenschaft, die einzig und allein dem Kreise zukommt. Denn bei ungleichförmiger Krümmung ist es höchstens möglich, daß von bestimmten *einzelnen* Punkten aus ein Theil der Linie früheren Theilen wieder identisch wird. Besteht eine Curve aus einer solchen unendlichen Reihe identischer endlicher Theile, so soll sie eine *periodische* heißen. Bei ungleichförmiger Krümmung hat vermöge des Begriffes dieser Ungleichförmigkeit von zwei verschiedenen Punkten innerhalb eines einzelnen solchen Theiles (einer Periode) aus die Curve nothwendig einen andern Verlauf, gleich lange Bogen von diesen verschiedenen Punkten aus

haben eine verſchiedene Geſtalt, daher auch die Gleichungen von beiden Anfangspunkten aus verſchieden ausfallen müſſen, obwohl ſie einer und derſelben Curve angehören.

Der Kreis iſt alſo eine periodiſche Linie, und die einzige von unbeſtimmter Periode. Denn b war bei jener Umwandlung eine völlig beliebige Größe. Jedes beliebige Stück des Kreiſes iſt mit einem andern von gleicher Länge identiſch, alſo die erſte Umdrehung der zweiten und allen folgenden, das Zehntel einer Umdrehung allen übrigen Zehntel-Umdrehungen u. ſ. f.

Dieſe Eigenſchaft der Curve, von allen Punkten aus, mögen ſie im poſitiven oder im negativen Aſte liegen, denſelben Verlauf vorwärts und rückwärts zu haben, fordert offenbar, daß jede nächſte Umdrehung die folgende bedeckt, oder daß die Linie in ſich ſelbſt zurückkehrt. Man kann dieſes auf mehrere Arten näher erörtern, z. B. auf folgende Weiſe. Nachdem der poſitive Aſt der Curve die erſte ganze Umdrehung gemacht, hat er an dem Endpunkte derſelben, wie jede Curve, wieder die Anfangsrichtung. Von dieſem wie von jedem andern Punkte an ſind alle folgende Theile, hier alſo alle folgende Umdrehungen mit der erſten identiſch,

weil die Gleichung, wenn man den Endpunkt der Umdrehung als neuen Anfangspunkt setzt, genau die vorige ist. Es werden also auch alle folgende Umdrehungen die erste bedecken, sofern noch nachgewiesen werden kann, daß das Ende der ersten Umdrehung mit ihrem Anfange nicht blos die Richtung, wie schon bemerkt, sondern auch den Anfangspunkt gemein hat. Die Nothwendigkeit hiervon ist klar. Die zweite halbe Umdrehung ist, man mag sie vorwärts oder rückwärts nehmen, mit der ersten halben Umdrehung identisch. Denkt man sich Anfangs- und Endpunkt der ersten halben Umdrehung durch eine Gerade verbunden, so ist die zweite, auf der andern Seite der Geraden, nicht nur identisch mit der ersten, sondern liegt auch identisch mit ihr in Bezug auf die Gerade, da Endpunkt und Endrichtung der ersten mit Anfangspunkt und Anfangsrichtung der zweiten zusammenfällt. Also muß die erste so auf der einen Seite der Geraden liegen, wie die zweite identische auf der andern. Da nun die erste mit dem Anfangspunkte von der Geraden ausgeht, so muß auch die zweite mit dem Endpunkte in demselben Punkte die Gerade treffen, indem die zweite vorwärts genau eben so, wie rückwärts verläuft. Daher kehrt die erste Umdrehung und damit

alle folgenden in ſich ſelbſt zurück. Dieſe Darſtellung leidet auf den negativen Aſt gleiche Anwendung, daher auch dieſer nach einmaliger Umdrehung fortwährend ſich ſelbſt bedeckt. Beide aber, der poſitive und negative Kreis fallen wiederum zuſammen, da ſie identiſch ſind (I, 4) und im Anfangspunkte dieſen ſo wie die Tangente gemein haben, auch auf einer Seite derſelben liegen.

VII. Convexität und Concavität.

1) Da alle Punkte des Kreiſes gemeine Curvenpunkte ſind (II), ſo bleiben Convexität wie Concavität ſtets auf derſelben Seite (§. 58, 1).

2) Da die Curve eine geſchloſſene Linie ohne Uebergangspunkte iſt und ſie daher ſtets zwiſchen zwei Tangenten beliebiger Punkte fällt, ſo kehrt ſie ſich ſelbſt überall die concave Seite zu (§. 60, 1, a, α und b, α; vergl. 2). Dieſe iſt alſo die innere Seite der Linie.

VIII. Selbſtausmeſſung.

Die Ausmeſſung eines jeden Linien-, Flächen- und Körpergebildes und ſo auch der Curve durch einen ihrer eignen Theile giebt uns einen reellen Aufſchluß über das Weſen des Gebildes und iſt

für die Erkenntniß der Curve als ſolche intereſſanter und wichtiger, als ſelbſt die Rectification, deren Ergebniß immer nur eine relative Eigenſchaft verkündet, die zwar für den Gebrauch von höchſter Wichtigkeit iſt, uns aber erſt einen Zuſammenhang bedeutender Wahrheiten aufſchließt, ſofern wir die rectificirte Linie durch das Mittel der Rectification einer Anzahl verwandter Curven mit dieſen, in Bezug auf Ausdehnung und Maaß, vergleichen, welches aber freilich ein indirecter Weg bleibt, den man beſſer mit einem directen vertauſcht; und es verdient die Verfolgung deſſelben Gegenſtand ſpäterer Unterſuchungen zu werden.

Was den Kreis betrifft, ſo gewährt die Selbſtausmeſſung auch hier das einfachſte Reſultat.

1) Soll die Länge eines Bogens durch einen andern ausgemeſſen werden, ſo müſſen natürlich Beide, Maaßſtab und zu Meſſendes, durch die entſprechenden Drehungsgrößen gegeben ſein. Wie ſich dieſe verhalten, ſo die beiden Bogen, wie eine einfache Betrachtung der Gleichung lehrt.

2) Umgekehrt kann man auch die Selbſtausmeſſung der Curve rückſichtlich der Drehungen in Frage ziehen. Denn man ſieht nicht ein, warum der eine Beſtandtheil vor dem andern bevorzugt ſein

sollte. Für diesen Fall müssen die Bogen, deren Drehungsgrößen durch einander gemessen werden sollen, durch die Längen gegeben sein. Die Gleichung ergiebt sogleich das Resultat, daß sich die Drehungen zweier Bogen wie ihre Längen verhalten.

§. 63.

Unter I bis VIII §. 62 sind die sämmtlichen absoluten Eigenschaften der Kreislinie unmittelbar aus ihrem Begriffe, der Gleichung, abgeleitet, und es ist dadurch die vollständige Erkenntniß der Linie an und für sich gewonnen. Eine solche in sich abgeschlossene erschöpfende Forschung gewährt eine wohlthuende wissenschaftliche Befriedigung, und hat bei den meisten Curven selbst einen großen Reiz durch den Gewinn der Ergebnisse, da diese selten so wie bei dem Kreise auf der Hand liegen und bekannt sind, sondern entweder gar nicht, oder nur fragmentarisch und auf indirecten Wegen erforscht wurden. Sogar für die Erkenntniß der Natur der Kreislinie (die nicht die vollkommenste oder gar die schönste, wohl aber, laut ihren absoluten Eigenschaften, die einfachste, bei der höchsten Symmetrie und augenfälligsten Harmonie der Mannigfaltigkeit

gänzlich entbehrende, daher die gemeinſte, eintönigſte und plumpſte Krumme iſt) möchte die Beleuchtung des, wenn gleich nicht neuen, doch oft nur dunkel gedachten Geheimniſſes ihrer Natur, eine Curve mit zwei unendlich ſich drehenden, unendlich fortſchreitenden Armen, eine im buchſtäblichen Sinne weder anfangende noch endende Curve zu ſein (denn der Anfangspunkt iſt nur ein geſetzter, das Aneinanderſtoßen der beiden entgegengeſetzten Arme zeigt, daß er nicht zu ihrem Weſen gehört), als ein kleiner Gewinn erſcheinen.

Zweites Kapitel.

Die einfachſte Curve nach der Kreislinie.

§. 64.

Wird in der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades unter den beiden veränderlichen Beſtandtheilen zunächſt geſetzt

$A=0$, $B=0$, C von endlichem Werthe, ſo entſteht die Gleichung

$$(1)\quad Cs^2+Dw+Es+F=0.$$

Die absoluten Eigenschaften der Krummen, welche dieser Gleichung entspricht, sollen untersucht werden.

Daß eine allgemeine von dem untersten Gliede an vollständige Gleichung, wie diese, nicht nur ihre Curve (oder Curven) selbst von einem bequemen characteristischen Anfangspunkte aus und in einer einzigen Lage (wie es doch für die Aufsuchung ihrer absoluten Eigenschaften am vortheilhaftesten ist), sondern von jedem beliebigen Anfangspunkte aus und in jeder möglichen Lage giebt, zeigte sich schon bei der Analyse der Kreisgleichung, und soll hier, um dieses Verhältniß ein für allemal recht klar zu machen, durch Aufsteigen von der speciellsten Form der vorliegenden Gleichung zu ihrer generellen wieder nachgewiesen, und darauf erst die Gleichung in ihrer einfachsten Gestalt zur Ableitung der absoluten Eigenschaften benutzt werden.

§. 65.

I. Setzt man in (1) die 3 letzten Coefficienten $= 0$, so bezeichnet die Gleichung den Anfangspunkt; werden **D** und **E** oder **D** und $\mathbf{F} = 0$ genommen, so ergiebt sich eine Gerade, im erstern Falle jedoch entspricht ihr dann gar kein räumliches

Gebild, wenn die Vorzeichen der Coefficienten gleich ſind.

II. Setzt man E und $F=0$, ſo erhält man

$$(2)\quad Cs^2+Dw=0,$$

deren Löſung in Beziehung auf beide Veränderliche iſt

$$(3)\quad w=-\tfrac{C}{D}s^2,\quad (4)\quad s=\pm r(-\tfrac{D}{C}w).$$

Haben hier C und D gleiche Vorzeichen, ſo bleiben die Ausdrücke unverändert, wenn man dieſe Coefficienten poſitiv denkt; haben ſie verſchiedene Vorzeichen, ſo entſteht unter dieſer Bedingung

$$(5)\quad w=\tfrac{C}{D}s^2,\quad (6)\quad s=\pm r(\tfrac{D}{C}w).$$

Es iſt zweckdienlich, dieſe letzten Gleichungen ſchon hier einer einfachen Analyſe zu unterwerfen, und dadurch der Unterſuchung der erſten abſoluten Eigenſchaften vorzugreifen.

Für $s=0$, iſt auch $w=0$: die Curve hat im Anfangspunkte die Anfangsrichtung.

Jeder poſitive und jeder negative Werth für s in (5) giebt einen poſitiven Werth für w: die Curve hat zwei vom Anfangspunkte nach entgegengeſetzten Richtungen auslaufende Aeſte mit poſitiver Drehung (ad und ag, Fig. 21).

Dieſe Aeſte ſind identiſch, denn irgend ein po-

ſitiver Werth für s giebt denſelben Werth für w, wie ein ihm an Größe gleicher negativer.

Auch ſind dieſe Aeſte unendlich lang, denn $s = \infty$ giebt $w = \infty$. Daſſelbe gilt von der Drehung.

Es ſind nur dieſe beiden Aeſte vorhanden, denn die negativen Werthe für w in (6) machen s unmöglich.

Eine ähnliche Betrachtung der Gleichungen (3) und (4) und ihre Vergleichung mit (5) und (6) lehrt, daß ſie dieſelbe Curve bezeichnen, nur hat ſie hier die zweite Lage (ah und af), die ſie nach der Gleichung noch erhalten kann, durch welche letztere die Richtung der Curve im Anfangspunkte die Anfangsrichtung iſt.

III. Für $D = 0$ erhält man aus (1)

$$s = -\frac{E}{2C} \pm r\left(\frac{E^2 - 4FC}{4C^2}\right),$$

alſo eine Gerade, oder, wenn $4FC$ poſitiv und $> E^2$, durch Unmöglichkeit des 2ten Gliedes des Ausdruckes gar keine räumliche Repräſentation.

IV. Nimmt man nur $E = 0$, ſo entſtehen die Löſungen

$$(7)\quad w = -\frac{C}{D}s^2 - \frac{F}{D},$$

$$(8)\quad s = \pm r\left(-\frac{D}{C}w - \frac{F}{C}\right).$$

Seien in (7) C und D, auch F und D von verſchiedenen Vorzeichen, ſo geht hervor:

$$(9)\quad w = \frac{C}{D} s^2 + \frac{F}{D},$$

worin nun die Coefficienten an ſich poſitiv ſind. $s = 0$ giebt $w = \frac{F}{D}$. Im Anfangspunkte hat die Curve nicht die Anfangsrichtung, alſo eine andere und zwar mehr poſitiv gewendete Lage gegen ab, als in (5). Uebrigens iſt die Curve dieſelbe, denn ſobald man ihr durch Verſchiebung dieſelbe Lage wie in (5) giebt, alſo ihr im Anfangspunkte die Anfangsrichtung ertheilt, indem $w' = w - \frac{F}{D}$ geſetzt wird, erhält man durch Einſchiebung des hieraus folgenden Werthes von w in (9)

$$w' = \frac{C}{D} s^2,$$

welches wieder Gleichung (5) iſt.

Giebt man den Vorzeichen der einzelnen Coefficienten in (7) noch die drei möglichen andern Relationen, ſo erhält man die Gleichungen der Linie in ihren 3 übrigen noch möglichen Lagen. Dieſe 4 und die 2 ſchon unter II nachgewieſenen kommen mit den 6 möglichen Lagen des Kreiſes überein (§. 30, 6 und 7).

V. Setzt man nur $F = 0$, ſo entſteht aus (1), wenn zugleich ungleiche Vorzeichen für C und D ſowohl als für E und D geſetzt werden,

$$(10)\quad w = \frac{C.s^2 + Es}{D},$$

$$(11)\quad s = \frac{-E \pm \sqrt{4CDw + E^2}}{2C},$$

worin also die Coefficienten an sich nun positiv sind.

$s = 0$ giebt $w = 0$: die Richtung der Curve im Anfangspunkte ist die Anfangsrichtung.

Für jeden positiven Werth von s ist auch w positiv, und zwar wächst w mit s, denn Es wird mit der Zunahme von s größer und Cs^2 ebenfalls, da mit der Größe ihr Quadrat wächst. Auch nimmt mit s das w in's Unendliche zu. Also liegt der eine vom Anfangspunkte auslaufende positive Zug als ein unendlicher auf der positiven Seite des Fortschrittes mit positiver Drehung, die unendlich groß wird (dpk, wenn d der Anfangspunkt, dm die Anfangsrichtung ist).

Giebt man s einen negativen Werth, so entsteht für jeden solchen ein Werth für w, der mit dem negativen s in's Unendliche wächst: denn der Werth von w in (10) muß zuletzt in's Unendliche zunehmen, da, sobald ein gewisser Werth überschritten ist, das Quadrat (Cs^2), welches positiv bleibt, die erste Potenz (Es), die negativ bleibt, immer mehr überragt. Folglich läuft ein zweiter Zug vom An-

fangspunkte aus nach der entgegengesetzten Richtung in's Unendliche. Die ganze Curve ist also eine einfache nach 2 Seiten unendliche Linie. Aber der zweite Ast ist erst vorläufig verfolgt, und es zeigt sich weiter, daß für den negativen Fortschritt w zuerst negativ wird, im Negativen wächst, ein Maximum desselben erreicht, wieder abnimmt bis zu 0 und dann in's Positive übergeht, worin es bis zum Unendlichgroßen steigt, wie dieses folgende Untersuchung ausweist. Da das Fallen und Wachsen des Werthes von w in (10) nur vom Zähler abhängt, so fragt es sich: für welchen Werth von s ist $Cs^2 + Es$ ein Maximum unter der Bedingung, daß s negativ sei? Werde das Maximum durch M bezeichnet, so haben wir die Forderung

$$Cs^2 + Es = M$$

$$(12)\quad s = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4CM}}{2C}.$$

Hierin erhalte M seinem Begriffe gemäß den höchsten Werth, den die Bedingungen zulassen. Der unbedingt höchste ist $M = \pm\infty$. Negativ unendlich aber kann M nicht werden, weil dadurch wegen des Wurzelzeichens s unmöglich ausfällt. Für $M = \infty$ aber wird $s = \pm\infty$, von welchen Werthen der untere der Bedingung entspricht. Das

positive Maximum des Ausdrucks $Cs^2 + Es$ entsteht also für $s = -\infty$, wie schon oben bemerkt wurde.

Aber es fragt sich, ob nicht auch ein negatives Maximum Statt habe? Der höchste negative Werth, den M annehmen darf, ist der, durch welchen $E^2 + 4CM$ noch nicht negativ wird, weil sonst wegen des Wurzelzeichens s unmöglich würde. Also ist die Bedingung

$$E^2 + 4CM = 0$$

$$M = -\frac{E^2}{4C}.$$

Diesen Werth für M in (12) eingesetzt ergiebt

$$s = -\frac{E}{2C}.$$

Für diesen Werth von s also erreicht $Es^2 + Es$, also auch w sein negatives Maximum.

Um Zu- und Abnahme des w vollständig verfolgen zu können, muß nun noch untersucht werden, für welche Werthe von s der mehrgedachte Ausdruck ein Minimum werde? Wenn m dieses bezeichnet, so ist die Bedingung

$$Cs^2 + Es = m$$

$$s = \frac{-E \pm \sqrt{E^2 + 4Cm}}{2C}.$$

Der kleinste Werth ist $m = 0$. Dafür wird

$$s = \begin{cases} 0 \\ -\frac{E}{C}, \end{cases}$$

wodurch die Frage beantwortet iſt.

Das Ergebniß der geführten Unterſuchung iſt alſo folgendes. Für die negativen Werthe von $s = 0$ bis zu $s = -\frac{E}{2C}$ wächſt w im Negativen, nimmt wieder von $s = -\frac{E}{2C}$ bis zu $s = -\frac{E}{C}$, bis zu 0 im Negativen ab, und wird für alle größeren negativen Werthe von s wieder poſitiv, darin bis in's Unendliche wachſend. Der negative Aſt der Curve (dag) hat alſo eine wachſende negative Drehung bis zu dem Punkte $s = -\frac{E}{2C}$ (in der Fig. a), welcher ein Wendungspunkt iſt, weil von da an bis zu dem Punkte $s = -\frac{E}{C}$ (in der Fig. g) (wo die Curve wieder die Anfangsrichtung hat und die Drehung in's Poſitive übergeht), die negative Drehung abnimmt (§. 10).

Der Umſtand, daß die beiden Punkte, worin die Curve zum erſten und zweiten Male die Anfangsrichtung hat (d und g) gleich weit vom Wendungspunkte (a) entfernt liegen, läßt vermuthen, ſie habe zwei identiſche Arme vom Wendungspunkte aus. Um dieſes zu unterſuchen verlege man den Anfangspunkt nach a, und ändere zugleich die An-

fangsrichtung der Curve in diejenige Richtung, die sie in a hat. Da nun $da = -\frac{E}{2C}$, die zu diesem Bogen gehörige Richtungsänderung durch Einschiebung dieses Werthes von s in Gleichung (10) als $-\frac{E^2}{4CD}$ gefunden wird, so ist, wenn man die Fortschritte vom neuen Anfangspunkte aus durch s', die Drehung von der neuen Aufangsrichtung aus durch w' bezeichnet,

$$s = s' - \frac{E}{2C}, \quad w = w' - \frac{E^2}{4CD}.$$

Durch Einschiebung dieser Werthe in die alten Gleichungen (10) und (11) entsteht

$$(13)\quad w' = \frac{C}{D} \cdot s'^2, \quad (14)\quad s' = \pm\sqrt{\frac{D}{C}w'},$$

woraus sogleich die Identität der beiden Arme von dem nun gewählten Anfangspunkte und der neuen Anfangsrichtung aus folgt, indem Gleichung (13) für die positiven Werthe von s dieselben Werthe für w liefert, die die größengleichen negativen ergeben.

Außerdem zeigt sich hieraus, daß die Curve einerlei mit der durch (5) und (6) dargestellten ist.

Die noch übrigen möglichen Relationen der Vorzeichen der Coefficienten in der aus (1) durch die Bedingung $F = 0$ entstehenden Gleichung ergeben wieder die noch übrigen möglichen Lagen der Linie.

$$s = \begin{cases} 0 \\ -\frac{E}{C}, \end{cases}$$

wodurch die Frage beantwortet iſt.

Das Ergebniß der geführten Unterſuchung iſt alſo folgendes. Für die negativen Werthe von $s = 0$ bis zu $s = -\frac{E}{2C}$ wächſt w im Negativen, nimmt wieder von $s = -\frac{E}{2C}$ bis zu $s = -\frac{E}{C}$, bis zu 0 im Negativen ab, und wird für alle größeren negativen Werthe von s wieder poſitiv, darin bis in's Unendliche wachſend. Der negative Aſt der Curve (dag) hat alſo eine wachſende negative Drehung bis zu dem Punkte $s = -\frac{E}{2C}$ (in der Fig. a), welcher ein Wendungspunkt iſt, weil von da an bis zu dem Punkte $s = -\frac{E}{C}$ (in der Fig. g) (wo die Curve wieder die Anfangsrichtung hat und die Drehung ins Poſitive übergeht), die negative Drehung abnimmt (§. 10).

Der Umſtand, daß die beiden Punkte, worin die Curve zum erſten und zweiten Male die Anfangsrichtung hat (d und g) gleich weit vom Wendungspunkte (a) entfernt liegen, läßt vermuthen, ſie habe zwei identiſche Arme vom Wendungspunkte aus. Um dieſes zu unterſuchen verlege man den Anfangspunkt nach a, und ändere zugleich die An-

$$w' + \frac{Cx^2 + Ex}{D} = \frac{C(s'+x)^2 + E(s'+x)}{D}$$

$$w' = \frac{C(s'+x)^2 + E(s'+x) - Cx^2 - Ex}{D}$$

Diese Function sollte dieselbe sein mit

$$w' = \frac{C}{D}s'^2, \text{ weshalb also}$$

$$\frac{C}{D}s'^2 = \frac{C(s'+x)^2 + E(s'+x) - Cx^2 - Ex}{D}$$

$$x = -\frac{E}{2C},$$

wie oben, und daraus $y = -\frac{E^2}{4CD}$. Durch Einsetzung von $s' - \frac{E}{2C}$ für s und von $w' - \frac{E^2}{4CD}$ für w in $w = \frac{Cs^2 + Es}{D}$ erhält man, wie verlangt worden,

$$w' = \frac{C}{D}s'^2.$$

VI. Setzt man in (1) alle drei Coefficienten endlich, so sind die Lösungen dieser Gleichung

$$w = \frac{-Cs^2 - Es - F}{D}, \quad s = \frac{-E \pm \sqrt{4CDw + E^2 - 4CF}}{2C}$$

Für $s = 0$ in der ersten dieser Gleichungen ist $w = -\frac{F}{D}$. Da nun w hier stets dieselben Werthe wie in der Gleichung (10) bei eben solcher Relation der Vorzeichen in dieser letzteren erhält, außer daß $\frac{F}{D}$ hinzu oder abkommt, dieses aber schon für den

Werth von $s = 0$ geschieht, so haben wir ganz dieselbe Curve wie unter V, nur daß sie hier die höchste und zwar vollkommene Freiheit der Lage gegen Anfangspunkt und Anfangsrichtung erhält.

§. 66.

Aus §. 65, I bis VI geht hervor, daß der allgemeinen Gleichung

$$Cs^2 + Dw + Es + F = 0,$$

wenn sowohl C als D endlich gesetzt werden, eine einzige Curve entspricht, welche durch die Abänderung sowohl der Vorzeichen als der Größen der Coefficienten alle möglichen Lagen gegen Anfangspunkt und Anfangsrichtung erhält, und die in einer einzigen und zwar der einfachsten Lage durch die Gleichung

$$w = \frac{C}{D} s^2$$

bezeichnet wird. Diese Form der Gleichung wird daher auch die bequemste für die Ableitung der absoluten Eigenschaften der Curve sein. Zur Abkürzung setzt man noch $\frac{C}{D} = a$. Die Gleichung

$$w = a \cdot s^2, \quad s = \pm \sqrt{\frac{w}{a}},$$

worin a positiv ist, enthält also den Begriff der Curve an sich.

Es ist im Gange der Entwickelung (§. 65, V, am Schluß) ein Weg gezeigt, auf welchem diese einfachste Form der zu untersuchenden Gleichung kurz und ohne Weiteres gefunden wurde. Ich schlug ihn nicht sogleich ein, weil meine Absicht war, dem minder geübten Leser in diesem Beispiele recht anschaulich zu zeigen, wie die allgemeinste Gleichung einer Curve ihren bloßen Begriff in die Bedingungen ihrer Lage hüllt, und auf welche Weise man beides von einander sondern kann.

§. 67.

Von den absoluten Eigenschaften dieser Linie (welche, so wie alle folgende Curven auf den Tafeln III und IV, streng richtig nach Zahl und Maaß Fig. 21 gezeichnet ist) wurden schon §. 65, II die ersten absoluten Eigenschaften abgeleitet, die wir hier (unter I) kurz wieder zusammenfassen und dann die übrigen beifügen wollen.

I. Lauf im Allgemeinen.

Die Curve hat zwei vom Anfangspunkte nach entgegengesetzten Richtungen auslaufende unendlich lange, beide positiv und unendlich sich windende identische Aeste.

Werth von $s = 0$ geschieht, so haben wir ganz dieselbe Curve wie unter V, nur daß sie hier die höchste und zwar vollkommene Freiheit der Lage gegen Anfangspunkt und Anfangsrichtung erhält.

§. 66.

Aus §. 65, I bis VI geht hervor, daß der allgemeinen Gleichung

$$Cs^2 + Dw + Es + F = 0,$$

wenn sowohl C als D endlich gesetzt werden, eine einzige Curve entspricht, welche durch die Abänderung sowohl der Vorzeichen als der Größen der Coefficienten alle möglichen Lagen gegen Anfangspunkt und Anfangsrichtung erhält, und die in einer einzigen und zwar der einfachsten Lage durch die Gleichung

$$w = \frac{C}{D} s^2$$

bezeichnet wird. Diese Form der Gleichung wird daher auch die bequemste für die Ableitung der absoluten Eigenschaften der Curve sein. Zur Abkürzung setzt man noch $\frac{C}{D} = a$. Die Gleichung

$$w = a \cdot s^2, \quad s = \pm \sqrt{\frac{w}{a}},$$

worin a positiv ist, enthält also den Begriff der Curve an sich.

V. Krümmungsverhältniß. Metamorphoſe der Curve.

$$k : k' = 2as : 2as' = s : s'.$$

Die Krümmungsſtärken verhalten ſich wie die Bogenlängen, oder, da $s = \frac{\pm rw}{ra}$, $s' = \frac{\pm rw'}{ra}$, wie die Quadratwurzeln aus den Drehungsgrößen.

Hierauf geſtützt hat die Unterſuchung §. 53, Beiſpiel 2, b ſchon gelehrt, daß ſich die Curve unter allen Bedingungen nur auf eine einzige Weiſe krümmt. Sie hat alſo eine unveränderliche Geſtalt.

Die Metamorphoſe betrifft demnach nur ihre Größe, die vom unendlich Kleinen ſtetig zum unendlich Großen übergeht (Vergl. §. 62, V).

VI. Selbſtausſchließung.

Daß die Curve keine periodiſche iſt, und ſich jeder Aſt derſelben immer mehr in ſich ſelbſt einwickeln oder jede folgende Windung die vorige ausſchließen muß, folgt ſchon aus den bisherigen Betrachtungen. (Ebenſo die Concavität jedes Aſtes auf der inneren Seite, ſo wie der Wechſel derſelben im Wendungspunkte.)

Die Curve gehört daher zu den Doppel-Spiralen nach innen gewunden. Obgleich die ein-

fachſte aller krummen Linien nach dem Kreiſe, war ſie doch, ſo viel ich weiß, bis jetzt nicht bekannt.

VII. Selbſtausmeſſung.

$$s : s' = \frac{\pm r_w}{r_a} : \frac{\pm r_{w'}}{r_a} = r_w : r_{w'};$$

$$w : w' = as^2 : a \,.\, s'^2 = s^2 : s'^2.$$

Die Bogenlängen vom Anfangspunkte aus verhalten ſich wie die Quadratwurzeln der entſprechenden Drehungsgrößen; umgekehrt verhalten ſich dieſe wie die Quadrate der Bogenlängen.

Drittes Kapitel.

Die Wechſelkrumme der einfachſten ungleichmäßig gekrümmten (im vorigen Kapitel behandelten) Linie.

§. 68.

Nach dem §. 34 gegebenen Begriffe von Wechſelkrummen iſt die Gleichung der gedachten Linie

$$s = aw^2, \quad w = \pm r^{\frac{1}{2}}.$$

V. Krümmungsverhältniß. Metamorphose der Curve.

$$k : k' = 2as : 2as' = s : s'.$$

Die Krümmungsstärken verhalten sich wie die Bogenlängen, oder, da $s = \frac{\pm rw}{ra}$, $s' = \frac{\pm rw'}{ra}$, wie die Quadratwurzeln aus den Drehungsgrößen.

Hierauf gestützt hat die Untersuchung §. 53, Beispiel 2, b schon gelehrt, daß sich die Curve unter allen Bedingungen nur auf eine einzige Weise krümmt. Sie hat also eine unveränderliche Gestalt.

Die Metamorphose betrifft demnach nur ihre Größe, die vom unendlich Kleinen stetig zum unendlich Großen übergeht (Vergl. §. 62, V).

VI. Selbstausschließung.

Daß die Curve keine periodische ist, und sich jeder Ast derselben immer mehr in sich selbst einwickeln oder jede folgende Windung die vorige ausschließen muß, folgt schon aus den bisherigen Betrachtungen. (Ebenso die Concavität jedes Astes auf der inneren Seite, so wie der Wechsel derselben im Wendungspunkte.)

Die Curve gehört daher zu den Doppel-Spiralen nach innen gewunden. Obgleich die ein-

vom Anfangspunkte aus positiv mit positiver Drehung (adf, Fig. 22 und 23).

3. Negative Werthe für w geben ebenfalls positive für s: ein zweiter Arm erstreckt sich vom Anfangspunkte aus positiv mit negativer Drehung (agh, Fig. 23).

4. Negative Werthe für s geben unmögliche für w: die Curve hat also nur diese beiden Arme.

5. Gleich großen positiven und negativen Werthen für w entsprechen gleich große positive Werthe für s: die beiden Arme der Curve sind identisch.

6. Je größer w, positiv oder negativ, desto größer auch s; $w = \infty$ giebt $s = \infty$. Die Arme der Curve wachsen in's Unendlichgroße und mit ihnen ihre Drehung.

II. Uebergangspunkte.

Der Anfangspunkt ist (wegen §. 36, 3) eine Spitze, alle übrige Punkte sind gemeine Curvenpunkte (§. 35, 1).

III. Krümmungsstärke aller Punkte.

Differentiirt man die Gleichung, so entsteht

$$2aw \cdot dw = ds$$

$$\frac{dw}{ds} = \frac{1}{2aw}$$

$$\frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w} = k.$$

IV. Die Punkte der größten und kleinsten Krümmung.

1. Für $w = 0$ wird k unendlich groß. Der Punkt der größten Krümmung ist also der Anfangspunkt.

2. Je größer w wird, desto kleiner k; für w unendlich groß ist k unendlich klein. Die Krümmung nimmt also vom Anfangspunkte aus immer ab, und jeder Arm der Curve strebt dem Punkte der kleinsten Krümmung endlos nach, und erreicht ihn im Unendlichen, d. h. nie.

V. Krümmungsverhältniß. Metamorphose der Curve.

$$k : k' = \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w} : \frac{1}{2a} \cdot \frac{1}{w'}$$

$$k : k' = \frac{1}{w} : \frac{1}{w'} = w' : w.$$

Daher verhalten sich die Krümmungsgrade zweier Punkte umgekehrt wie die Drehungsgrößen, oder

umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Bogenlängen.

Da auch bei dieſer Curve das Krümmungsverhältniß $w' : w$ unabhängig von beſtändigen Größen, auch von der des abſoluten Werthes der Drehungseinheit iſt, ſo hat die Curve eine unveränderliche Geſtalt (§. 54.) und erſcheint nur in allen möglichen Größen.

VI. Selbſteinſchließung.

Aus dem Krümmungsgeſetze geht hervor, daß jede folgende Windung eines und deſſelben Aſtes die vorige einſchließen oder daß ſich jeder Arm fortwährend aus ſich ſelbſt herauswickeln muß. Die Kr. iſt alſo eine Spirale und zwar eine Doppel-Spirale nach außen (gewunden). An beiden Aeſten bleibt die Concavität ſtets auf derſelben Seite, auf der inneren.

VII. Selbſtausmeſſung.

Es iſt $s : s' = aw^2 : aw'^2 = w^2 : w'^2$.

Die Bogen vom Anfangspunkte aus verhalten ſich wie die Quadrate der Drehungsgrößen. Nimmt man alſo die Drehungen

1, 2, 3, 4, 5 ...,

ſo erhält man als die entſprechenden Bogenlängen (für $a = 1$)

$$1, 4, 9, 16, 25 \ldots\ldots$$

Setzt man alſo als Drehungseinheit eine ganze Umdrehung, ſo hat man für die 1ſte, 2te, 3te, 4te, 5te Windung der Curve die Bogenlängen

$$1, 3, 5, 7, 9, \text{ꝛc.}$$

Die Krumme ſtellt in dieſem Sinne eine arithmetiſche Progreſſion mit dem Anfangsgliede 1 und der Differenz 2 dar. Man ſieht dieß allgemein, wenn man die Länge der n^{ten} Windung von der der $n+1^{ten}$ abzieht.

1. Die Länge der n^{ten} Windung. Man erhält ſie, indem man von der Größe aller n Windungen die von $n-1$ Windungen abzieht. Für $w = n$ iſt aber $s = an^2$ und für $w = n-1$ iſt $s = a(n^2 - 2n + 1)$. Daher die Länge der n^{ten} Windung $=$

$$an^2 - (an^2 - 2an + a) = a(2n - 1).$$

2. Die Länge der $n + 1^{ten}$ Windung. Wird von der Länge aller n 1 Wind. die von n Wind. ſubtrahirt, ſo entſteht als Größe der $n+1^{ten}$ Windung

$$a(2n+1).$$

3. Daher ist die Differenz zweier benachbarten Windungen $= a(2n+1) - a(2n-1) = 2a$, und daher $= 2$ für $a = 1$.

Will man die Drehungen durch die Längen ausmessen, so ergiebt die Gleichung

$$w : w' = \pm r^s : \pm r^{s'},$$

d. i. die Drehungen verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Bogenlängen.

Anmerk. Setzt man $s = aw^3$, so entwickelt diese cubische Spirale ebenfalls 2 Arme, die jedoch eine andere gegenseitige Lage haben. Denn hier geben die positiven Werthe für w positive für s, die negativen negative; man hat also 2 entgegengesetzte Arme mit entgegengesetzter Drehung. Der zweite Ast läuft also nicht wie agh Fig. 23, sondern in der Richtung von a nach f. Zwei Züge solcher Art hat jede Spirale von der Gleichung $w^{2n+1} = s$, zwei Arme aber wie Fig. 23 jede von der Form $w^{2n} = s$, wo in beiden Fällen n eine positive ganze Zahl ist. Der Anfangspunkt aller Linien der letzten Art ist eine Spitze, aller Linien der ersten Art ein gemeiner Curvenpunkt.

Die Spirale $s = aw^3$ holt bei weitem ſtärker aus als $s = aw^2$ und entfernt ſich daher raſcher vom Anfangspunkte. Denn nach der 1ſten, 2ten, 3ten, 4ten Umdrehung beträgt ihre Länge 1, 8, 27, 64 ꝛc.

Viertes Kapitel.

Die Linie (1) $s = \pm r(w - w^2)$, (2) $w = \frac{1}{2} \pm r(\frac{1}{4} - s^2)$, oder die Linie der Kreisgleichung (aus dem Scheitelpunkte) unter rechtwinkligen Coordinaten, für den Durchmeſſer = 1.

§. 70.

1. Lauf im Allgemeinen. Uebergangspunkte. Perioden. Verſetzung des Anfangspunktes und der Anfangsrichtung.

1. Setzt man in Gl. (1) $w = 0$, ſo iſt $s = 0$, im Anfangspunkte hat die Curve die Anfangsrichtung (ab, Fig. 24).

2. Negative Werthe für w machen s unmöglich.

Für die Reihe der positiven Werthe von w hat s (Gl. 1) zwei Reihen identischer Werthe, eine positive Reihe und eine negative, Die Curve hat also zwei und nicht mehr Aeste. Diese sind identisch und laufen vom Anfangspunkte aus: der eine positiv (ad ꝛc.) der andere negativ (ag ꝛc.), beide mit positiver Drehung.

3. Der Anfangspunkt ist daher ein Wendungspunkt (§. 36, 2).

4. Da die Radicalgröße in (1) nicht negativ werden darf, wenn nicht s unmöglich werden soll, so ist die Bedingung des höchsten Werthes für w

$$\frac{w - w^2 = 0}{1 = w.}$$

w kann also nur die Reihe der Werthe von 0 bis 1 annehmen: das Maximum der Drehung der Curve vom Anfangspunkte aus ist die Drehungseinheit. (Diese erhalte in Fig. 24 die absolute Größe von 2 R.)

5. In Gl. (2) erhalte s den höchsten Werth, den es anzunehmen vermag. Dieser ist $\frac{1}{4} - s^2 = 0$, oder $s = \pm \frac{1}{2}$. Für diesen Werth wird $w = \frac{1}{2}$. Der kleinste Werth für s ist $= 0$, wofür

$$w = \begin{cases} 1. \\ 0. \end{cases}$$

6. Was daher zuerſt den poſitiven durch $s = \pm r(w - w^2)$ ausgedrückten Arm betrifft, ſo ſteigen für die Werthe von w, 0 bis $\frac{1}{2}$, die Werthe für s von 0 bis $\frac{1}{2}$, aber für die ferneren Werthe von w, $\frac{1}{2}$ bis 1, nehmen die für s von $\frac{1}{2}$ bis 0 wieder ab. Der Arm hat daher eine Spitze im Punke $s = \frac{1}{2}$ (in der Fig. d). Denn da die Werthe von s von dieſem Punkte an wieder abnehmen, ſo muß der Fortſchritt entgegengeſetzt werden, während die Drehung weiter wächſt. Durch den nunmehrigen negativen Fortſchritt (df) wird der frühere poſitive nach und nach wieder aufgehoben, ſo daß er, wenn $df = \frac{1}{2}$, im Punkte f wieder $= 0$ iſt. Die Drehung beträgt hier dagegen $= 1$ (in der Fig. 2 R; die Richtungslinie der Curve in f iſt fp). Der poſitive Arm iſt alſo zunächſt adf.

7. Der negative Arm, für $s = -r(w - w^2)$, iſt, bei ebenfalls poſitiver Drehung (2), identiſch mit dem poſitiven und hat daher im Punkte $s = -\frac{1}{2}$ (in der Fig. g) eine Spitze. Der ganze Zug mit einem Wendungspunkte in der Mitte,

und zwei Spitzen in der Mitte der beiden Hälften wäre also zunächst wie in der Fig. fdagh.

8. Zugleich erkennt man aus Gleichung (2), daß für dieselben Werthe von s der Bestandtheil w Werthe, gleichviel über und unter $\frac{1}{2}$, erhält, d. h. vom Punkte $w = \frac{1}{2}$ (d) aus laufen zwei identische Zweige, jeder $= \frac{1}{2}$ an Länge.

9. Da für $w > 1$ der Fortschritt unmöglich wird, so könnte es scheinen, als ob die Curve in den Punkten f und h abbräche und somit eine endliche sei. Dem ist indeß nicht so. Zwar kann w nicht weiter wachsen, aber es kann vom Punkte f aus wieder abnehmen, also die Krumme z. B. aus ihrer Richtung fp im Punkte f wieder in die Richtung fk nach und nach übergehen. Die Drehung wird also eine der vorigen entgegengesetzte und bleibt es, bis die vorige positive Drehung $+1$ durch eine neu angesetzte relativ negative von gleicher Größe wieder aufgehoben ist. Nun schlägt sie von neuem in positive Werthe bis zu $+1$ über und setzt dieses Schwanken in's Unendliche fort. Da in f die Drehung entgegengesetzt wird, so ist f (und im negativen Aste h) wieder ein Uebergangspunkt der Drehung, und ein solcher wiederholt sich im un-

endlichen Laufe der Curve so oft, als die Drehung wieder in ihr Entgegengesetztes überschlägt, also so oft eine Drehungseinheit, oder die ihr entsprechende aus zwei entgegengesetzten Hälften bestehende absolute Längen-Ausdehnung 1 (die Bogeneinheit) durchlaufen ist. — Da nun für w von f an wieder abnehmende positive Werthe erfolgen, so erhält s, das in f = 0 geworden war, fernere positive Werthe, und zwar nothwendig die Werthe, die es vorher für w, $\frac{1}{2}$ bis 1, erhalten hatte, da dieses wieder zunächst von 1 bis $\frac{1}{2}$ abnimmt, in umgekehrter Folge. Das zunächst neu entstehende Stück fm ist also von f aus identisch mit fd. Ist nun gleich der Zug df, vom Punkte d aus gerechnet, in Beziehung auf den Zug da ein negativer, so ist doch der ganze Zug adf von a aus gerechnet ein positiver, folglich schreiten die neuen positiven Werthe für s unentgegengesetzt in der Richtung df fort. Die oben bemerkten Uebergangspunkte der Drehung sind also keine Schnäbel, sondern Wendungspunkte. Da ferner von f aus die Werthe für s wieder bis zu $\frac{1}{2}$ steigen, dann aber von neuem abnehmen müssen, so ist, wenn fm = $\frac{1}{2}$, m

im Allgemeinen nicht Statt; die Anschauungen des allgemeinen Begriffes können verschiedene Gestalt haben. Sollte sich aber zeigen, daß die so eben erhaltene Bedingung wenigstens unter irgend einer speciellen brauchbaren Voraussetzung wahr würde, so ginge daraus die Möglichkeit der Aehnlichkeit und die Bedingung ihrer Wirklichkeit hervor.

$$(S'^2 - S^2 + S - S')(f^2 - 1)$$

kann aber unter zwei Bedingungen $= 0$ werden.

1. Der erste Factor sei $= 0$, woraus folgt $S = S'$. Soll dies sein, so fallen beide Punkte in einen zusammen, sowohl in dem einen als in dem andern Exemplare der Curve, denn aus $S = S'$ folgt auch $s = s'$. (Siehe die obigen beiden durch S und S' ausgedrückten Werthe von s und s'.) Läßt man aber wirklich dieses Zusammenfallen geschehen, so kann von keinem Gleichverhältniß der Krümmungsstärken je zweier verschiedenen Punkte in der einen und in der andern Curve mehr die Rede sein und die Möglichkeit der Untersuchung der Gestalt durch ihren Begriff fällt hinweg, das ganze Verfahren ist von vorn herein unter dieser Voraussetzung eine hohle Form gewesen: denn freilich, da in

die erſte bedeckende, Fläche entſtand, ihre Nichtbeachtung alſo keinen weitern Uebelſtand nach ſich zog, als etwa den, daß man die Fläche und ihre Grenze als einfach anſah, während die eine wie die andere nach dem Geſetze unendlich viele Male ſich ſelbſt bedeckt. Nach der vervollſtändigten Anſicht wird alſo z. B. die Function des Kreiſes für rechtwinklige Coordinaten eine Begrenzungslinie deſſelben geben, die unendlich fortläuft und ſich dabei immer wieder ſelbſt bedeckt, und dieſes ſtimmt überein mit dem Ergebniſſe der polaren Erzeugungsweiſe der Kreislinie ſowohl als mit der urſprünglichen Bildungsart derſelben (§. 62, I, 5), wonach der Kreis (ſo wie alle krumme Linien) ſchlechthin ohne Ende iſt.

10. Es wurde bisher bei der Unterſuchung des Laufes der Krummen die Gl. (1) zu Grunde gelegt und Gl. (2) nur beiläufig zu Rathe gezogen. Dieſe letztere, mit Gl. (1) einerlei, nur für den anderen Beſtandtheil gelöſ't, muß nothwendig von demſelben Anfangspunkte und derſelben Anfangsrichtung aus dieſelbe Linie geben. Da ſie aber eine vierarmige zu geben ſcheint, ſo unterwerfen wir ſie noch einen Augenblick der Betrachtung, um ihre richtige Deutung zu gewinnen. Nehmen wir zuerſt dieſe Gleichung,

(2) $w = \frac{1}{2} \pm r(\frac{1}{4} - s^2)$,

unter der Bedingung, daß s positiv sei, so erhalten wir, wie vorher, den Zug adf. Es bekommt nämlich, in diesem Fall, für die nur möglichen Werthe von s, 0 bis $\frac{1}{2}$, w zwei Reihen von Werthen, nämlich die Werthe 0 bis $\frac{1}{2}$ für das negative Zeichen der Gleichung, und 1 bis $\frac{1}{2}$ für das positive Zeichen. Gl. (1) aber hat ausgewiesen, daß derjenige Punkt $s = 0$, welcher $w = 1$ entspricht, nicht der Anfangspunkt, sondern der Punkt f ist; daher die Werthe von 1 bis $\frac{1}{2}$ für w zu denjenigen Werthen von s, 0 bis $\frac{1}{2}$, gehören, welche von f nach d laufen. Diese Werthe für w, 1 bis $\frac{1}{2}$, folgen also in der umgekehrten Ordnung, $\frac{1}{2}$ bis 1, für die Werthe von s, $\frac{1}{2}$ bis 0, welche sich von d nach f wiederholen, wie dieses von jeder Reihe endlicher Werthe beliebig geschehen kann. Die zweite Reihe der Werthe für w, 1 bis $\frac{1}{2}$, wird also nicht vom Anfangspunkte aus, sondern vom Punkte f aus, oder da dieses nicht real geschehen kann, in umgekehrter Folge vom Punkte d aus construirt. — Für den Ast, der durch die Bedingung, daß s negativ sei, entsteht, gilt das-

ſelbe; auch er iſt ein einfacher, für welchen $s=0$ ſowohl im Punkte h als im Punkte a iſt.

11. Der Lauf im Allgemeinen und insbeſondere die Unendlichkeit der unterſuchten Linie beſtätigt ſich auf überraſchende Weiſe durch die Verlegung ihres Anfangspunktes nach d, der nächſten Spitze im poſitiven Arme, und die Veränderung ihrer Anfangsrichtung in die durch dt bezeichnete. Heißen von den neuen Standpunkten aus die Beſtandtheile w', s', ſo iſt erſtlich

$$\begin{aligned} w' &= w - \tfrac{1}{2} \\ w' + \tfrac{1}{2} &= w. \end{aligned} \qquad (3)$$

Verlangte man ferner den neuen Anfangspunkt mit derjenigen Richtung, die die Curve in d hat, alſo mit dq, ſo hätte man ebenſo von dem alten Längenbeſtandtheil $\frac{1}{2}$ abzuziehen, um den neuen (der s'' heiße) zu gewinnen, alſo

$$s - \tfrac{1}{2} = s''.$$

Aber die poſitive Richtung dieſes Anfangspunktes ſollte (der Bequemlichkeit wegen) nach t zu gehen, alſo gerade entgegengeſetzt, ſo daß

$$s'' = -s',$$

daher

$$\begin{aligned} s - \tfrac{1}{2} &= -s' \\ s &= -s' + \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \qquad (4)$$

Dieſe Metamorphoſe der Größe geht alſo gewiſſermaßen von jedem Momente der Metamorphoſe der Geſtalt aus.

Fünftes Kapitel.

Die Linie $w = a \cdot \frac{1}{s}$.

§. 71.

Anmerk. 1. Dieſe Linie gehört der allgemeinen Gleichung des 2ten Grades, und insbeſondere der Form

$$Bws + Dw + Es + F = 0$$

an. Setzt man ſtatt der Beſtandtheile w und s rechtwinklige Coordinaten, ſo ſtellt die zu unterſuchende Gleichung $(x = \frac{a}{y})$ eine Form der gemeinen Hyperbel dar.

Anmerk. 2. Die Wechſelkrumme der Linie iſt ſie ſelbſt, denn aus

(1) $w = a \cdot \frac{1}{s}$ folgt

(2) $s = a \cdot \frac{1}{w}$.

c) Der Anfangspunkt ist daher eine Spitze (§. 36, 3).

d) Für die Werthe von s', 0 bis $\frac{1}{2}$, steigen die Werthe für w' von 0 bis $\frac{1}{2}$ und nehmen für die weiteren Werthe von s' bis zu 0 wieder ab. Ist daher $df = \frac{1}{2}$, so ist f ein Wendungspunkt und fm das zweite Stück des positiv sich drehenden Armes. Ebenso ist a ein Wendungspunkt im negativen Arme und das zweite Stück desselben ag.

Die zunächst, ohne Benutzung zurückgehender Werthe durch die Gleichung ausgedrückte Linie (ihre Periode) ist hier also mfdag, während unter derselben Bedingung früher für dieselbe Linie der Zug fdagh hervorging. Rückt man also den Anfangspunkt ein Stück $= \frac{1}{2}$ im positiven oder negativen Arme fort, und wiederholt diese Operation unendlich oft, so erhält man eine unendliche Linie für die Gleichung, da doch die Curve für alle beliebige Anfangspunkte dieselbe bleiben muß. Eine abermalige Bewährung der Nothwendigkeit, unendlich oft zurückgehende Reihen von Werthen anzunehmen, wenn man scheinbar endliche Linien ganz und nicht bloß eine einzelne Periode derselben erhalten will.

Bemerkung. Die absolute Größe der Drehungseinheit kann, wie in Fig. 24, 2R, oder wie

in Fig. 25, 4 R, oder wie in Fig. 26, 8 R oder ſonſt einen Theil oder ein Vielfaches der Viertelsumdrehung betragen. Es verſteht ſich von ſelbſt, daß, wie auch dieſe Annahme gemacht werde, der Lauf der Linie im Allgemeinen, ſo wie auch die folgenden abſoluten Eigenſchaften unverändert dieſelben bleiben. Das unter 1 bis 11 Geſagte gilt alſo gleichmäßig von den beiden letztgenannten Figuren. Dieſe ſtellen nur eine einzige Periode der Linie und zwar die der Gl. (6) $w = \pm r\sqrt{s - s^2}$, alſo die dem Zuge mfdag Fig. 24 entſprechende dar. Dieſe Gleichung ſoll auch bei der folgenden Ableitung einiger andern abſoluten Eigenſchaften der Linie zu Grunde gelegt werden. Damit nicht die Auffaſſung der begrifflichen Allgemeinheit der Eigenſchaften durch den ſteten Hinblick auf eine und dieſelbe Anſchauung erſchwert werde, iſt es gerathen, auch die beiden andern Veranſchaulichungen des Begriffes (Fig. 25 und 26) mit in's Auge zu faſſen. Die letzte Form der Curve (Fig. 26) iſt unter der Vorausſetzung, daß die abſolute Größe der Drehungseinheit 8 R betrage, unveränderlich, wie weiter unten erhellt. Sie hat Aehnlichkeit mit einer Lyra, in der unten ein Herz ruht. Wegen des ſymboliſch Bedeutenden dieſer Geſtalt lege ich

$s = \frac{1}{10} = \frac{17}{170}$, so hat man $k = \frac{4}{3}$,

$s = \frac{1}{17} = \frac{10}{170}$ " " $k = \frac{15}{8}$.

Da die Länge von der Spitze bis zum Wendungspunkte $\frac{1}{2}$ beträgt, so entsteht, wenn die Bogen von dem letzteren aus (also statt von d, von a oder von f aus) gerechnet werden, und diese Bogen durch s′ bezeichnet, für

$s' = \frac{51}{170}$, $k = \frac{3}{4} = \frac{18}{24}$,

$s' = \frac{68}{170}$, $k = \frac{4}{3} = \frac{32}{24}$,

$s' = \frac{75}{170}$, $k = \frac{15}{8} = \frac{45}{24}$.

Anmerk. Hier tritt zugleich anschaulich hervor, wie vom Wendungspunkte aus die Krümmung mit stets fortdauernder Beschleunigung zunimmt.

III. Die Punkte der kleinsten und größten Krümmung.

1. Die absolut kleinste Krümmung würde sein $k = 0$; daher die Bedingung für den etwa vorhandenen Punkt derselben, daß im Werthe $\frac{1-2s}{2r(s-s^2)}$ der Zähler verschwinde. Also $1 - 2s = 0$ woraus $\frac{1}{2} = s$. Der gesuchte Punkt ist also der Wendungspunkt. Da die Periode in zwei Aesten vom Anfangspunkte aus positiv fortschreitet, so liegen dieser Punkte zwei in ihr, und unendlich viele in der ganzen Curve.

hung und Fortschritt. Während der Theil nach d hin unendlich lang ist und sich dabei die Drehung unendlich einer endlichen Größe nähert, ist der Theil nach n hin von unendlich großer Drehung, wobei seine Länge unendlich einem endlichen Werthe sich nähert.

Anmerk. Linien, wie diese, die bisher schlechtweg unter die Spiralen gezählt worden, sollten mit dem Namen Halbspiralen belegt werden. Unter diesem Namen sind jedoch auch diejenigen Linien zu begreifen, die nach beiden Erstreckungen unendlich große Länge haben, sowohl nach der Seite der unendlich großen als nach der einer endlichen Größe unendlich sich annähernden Drehung. Die Halbspiralen, zu denen z. B. die hyperbolische Spirale, der Lituus ꝛc. gehören, bilden eine eigene und wichtige Klasse krummer Linien und unterscheiden sich dadurch von den Spiralen, daß die letzteren sich nach beiden Erstreckungen des einfachen Zuges unendlich winden, jene aber nur nach einer, nach der andern hingegen sich unendlich strecken. Diese Verschiedenheit ist eine wesentliche. Die Arme der Parabel sind beide Strecker (d. h. bei unendlicher Länge nähert sich ihre Drehung unendlich einer endlichen Größe), die der eigentlichen Spiralen (z. B.

der archimedischen, der logarithmischen ꝛc.) beide **Winder** (d. h. von unendlich großer Drehung, die Länge mag dabei endlich oder unendlich groß sein). Die Halbspiralen liegen also zwischen den Spiralen und zwei- oder mehrseitig gestreckten Linien (Parabeln) in der Mitte, und könnten, wenn man sie nur nach der Eigenthümlichkeit ihrer einen Erstreckung benennen will, mit vollkommen so gutem Rechte Parabeln als Spiralen heißen.

5. Die Vorstellung eines ganzen Astes vom Anfangspunkte a aus und der Lage beider Aeste gegen einander ist nun leicht möglich. Für den positiven Fortschritt ist auch die Drehung positiv. Da diese aber von der entgegengesetzten Seite her gerechnet wird, so muß man sie entgegengesetzt, also hier negativ, nehmen, wenn man den Lauf der Curve auch in Rücksicht der Drehungen von a aus verfolgen will. Der in Rede stehende positive Ast (angfd) der Linie habe von a aus schon unendliche Umdrehungen gemacht und zwar so, daß ihm nur noch eine einzige zu machen übrig bleibt, und befindet sich daher für diese Bestimmung genau im Punkte, wo der Buchstabe a stehet. (Dieser bezeichnet eigentlich den Anfangspunkt, in der Mitte; aber

die Kleinheit der Zeichnung ließ die Hinstellung eines besondern Zeichens für den letzteren nicht zu). Der zweite, negative und identische Ast habe ebenfalls nur noch eine Umdrehung zu machen; in diesem Punkte befindet er sich nothwendig, wie dies überhaupt für jeden Punkt mit gleich großer absoluter Drehung bei identischen Linien der Fall ist, auf derselben Seite der Anfangsrichtung (cb). (Die Fig. 28 und 29, Taf. II, erläutern dieses durch die Anschauung. In der erstern dreht sich die Linie negativ bei positivem Fortschritte, in der zweiten positiv bei negativem Fortschritte, ebenso wie in unserm Falle, nur daß diese Figuren die Unendlichkeit der Windungen ignoriren, also die Drehung vom Anfangspunkte aus begonnen ist. Der Punkt d z. B., an dem die Krumme in beiden Figuren gleiche absolute Drehung hat, liegt auf derselben Seite der Anfangsrichtung; von ihm aus läuft die Linie Fig. 28 aufwärts, die Linie Fig. 29 niederwärts.) Seine Drehung aber so wie sein Fortschritt sind dem des identischen positiven Astes in dem ähnlich liegenden Punkte gerade entgegengesetzt, vermöge der Gleichung. Während sich also der positive Ast für das erste

Unterſuchung hat die Curve für alle möglichen verſchiedenen Werthe der abſoluten Größe der Drehungseinheit eine andere Geſtalt. Dieſe abſoluten Größen können von 0 an bis ins Unendliche ſtetig aufſteigen. Läßt man ſie, bei einer und derſelben abſoluten Größe der Längeneinheit, in dieſer ſtetigen Folge in die Gleichung eintreten, ſo wird die Geſtalt der Linie eine ſtetige Metamorphoſe erleiden. Da die Curve aus lauter identiſchen Perioden, jede Periode aber wieder aus zwei identiſchen Hälften (z. B. dfm und dag) beſteht, ſo reicht es hin, der Metamorphoſe einer ſolchen Hälfte nachzugehen. Die abſolute Größe der Drehungseinheit $=0$ giebt wegen Mangels aller Drehung für eine ſolche Hälfte eine endliche Gerade. So wie kleine reelle nach und nach aufſteigende Werthe (z. B. 1°, 2°, 5°) für jene abſolute Größe eintreten, fängt die Linie an ſich von ihrer Mitte aus auf gleiche Weiſe aber nach verſchiedenen Seiten, zuerſt kaum merkbar, zu krümmen, und zwar im Ganzen jedesmal um die Hälfte der abſoluten Drehungsgröße nach jeder Seite. Das Krümmungsgeſetz ſchreibt vor, auf welche Art dies geſchieht, und hat bereits beſtimmt, daß dieſe Krümmung nahe an der Mitte der Linie unendlich klein

Oder wünſcht man k durch w ausgedrückt, ſo geht durch Einſchiebung hervor $-\frac{w^2}{a}=k$.

IV. Die Punkte der größten und kleinſten Krümmung.

1. Setzt man in der erſten Krümmungsgleichung $s=0$, ſo wird k unendlich groß. Der Punkt der größten Krümmung iſt alſo der Anfangspunkt.

2. Setzt man in der zweiten Krümmungsgleichung $w=0$, ſo wird $k=0$. Der Punkt der kleinſten Krümmung iſt, wo die Linie die Anfangsrichtung hat, d. h. im Unendlichen des Fortſchrittes.

Nach der einen Erſtreckung ſtrebt alſo die Linie dem Punkte der größten, nach der andern dem Punkte der kleinſten Krümmung unendlich nach, ohne einen von beiden jemals zu erreichen. Nach der einen Erſtreckung nimmt die Krümmung endlos ab, nach der andern endlos zu. Dieſes gilt gleichmäßig vom poſitiven wie vom negativen Aſte, denn $-s$ ſtatt s in die erſte Krümmungsgleichung geſetzt, gewährt dieſelben Reſultate. In beiden Fällen iſt übrigens die Krümmung negativ.

V. Krümmungsverhältniß. Geſtalt.

(1) $k : k' = -\frac{a}{s^2} : -\frac{a}{s'^2} = s'^2 : s^2$.

Die Krümmungsſtärken verhalten ſich umgekehrt wie die Quadrate der Bogenlängen.

(2) $k : k' = -\frac{w^2}{a} : -\frac{w'^2}{a} = w^2 : w'^2$.

Die Krümmungsſtärken verhalten ſich wie die Quadrate der Drehungen.

3) Alle Curven dieſer Gleichung ſind ähnlich, da das Krümmungsverhältniß unabhängig von den beſtändigen Größen iſt. $w^2 : w'^2 = (fw)^2 : (fw')^2$ iſt eine richtige Proportion.

Sechstes Kapitel.

Einige höhere Curven.

§. 72.

Der bisherige Inhalt dieſes Abſchnittes macht, hoffe ich, hinlänglich klar, wie man den Zuſammenhang der wichtigſten abſoluten Eigenſchaften einer Curve unter ſich und mit dem Begriffe erforſcht. Ich wählte zu dieſem Zwecke die Linien verſchieden-

artig und ſo einfach als möglich. Sie repräſentiren der Reihe nach die Linien des erſten und zweiten Grades, und zwar entſpricht die erſte (der Kreis) der Gleichung der geraden Linie für rechtwinklige Coordinaten, die zweite und mit ihr die dritte der Gleichung der Parabel, die vierte dem einfachſten ſpeciellen Falle der Gleichung für die Ellipſe, nämlich der Kreisgleichung, die fünfte einem ſpeciellen Falle der Gleichung für die Hyperbel. Mit ferneren Unterſuchungen dieſer Art einhaltend begnüge ich mich hier, zu weiterer Anregung noch ein paar leichte Gleichungen des dritten Grades, ein paar Exponential-Gleichungen und eine ſehr einfache trigonometriſch transcendentale mit den nach Zahl und Maaß gebildeten Zeichnungen entſprechender Curvenexemplare und einigen kurzen Bemerkungen zu begleiten.

I. Gleichung: $ws^2 = a$; daraus

$$w = \frac{a}{s^2}, \qquad s = \pm r\frac{a}{w}.$$

Die Linie gehört zu einer Gattung mit der des vorigen Kapitels, da die Gleichung dieſelbe Form hat. Sie verbreitet ſich ebenfalls in zwei identiſchen Armen, deren jeder eine Halbſpirale iſt; Fig. 30 ſtellt nur einen ſolchen Arm, alſo nur die halbe

Linie dar. Die Anfangsrichtung ist gk; dem Parallelismus mit ihr nähert sich der gestreckte Zweig der Linie ohne Ende. Der Anfangspunkt liegt im Innern des gewundenen Zweiges, der diesem Punkte sich unendlich nähert. Im Punkte g ist $s = 1$ gesetzt, und $a = 1$ R.

II. Gleichung: $ws^2 + w = s^2$; daraus

$$w = \frac{s^2}{s^2+1}, \qquad s = \pm r\frac{w}{1-w}.$$

Die Linie hat zwei vom Anfangspunkte aus entgegengesetzt fortschreitende aber beide positiv sich wendende identische Arme, die bei unendlicher Länge einer endlichen Drehungsgröße ohne Ende sich nähern. Diese Größe ist die Drehungseinheit, auf deren absoluten Werth es also ankommt, und mit welchem die Gestalt der Curve sich ändert. In den Figuren 31, 32 und 33 ist dieser Werth = 1 R, 2 R, 4 R gesetzt. a ist der Anfangspunkt, ab die Anfangsrichtung.

III. Gleichung: $w \cdot 2^s = 2^s - 1$, daraus

$$w = \frac{2^s-1}{2^s} = 1 - \frac{1}{2^s}.$$

Die Linie ist eine Halbspirale, die jedoch zu einer andern Art derselben, als die beiden schon betrachteten gehört, und sich von ihnen dadurch wesentlich unterscheidet, daß sie nur aus einem einzigen

Aſte beſteht, der auch nach der Seite der unendlich großen Drehung unendlich lang iſt (nicht, wie die früheren, ſich unendlich einer endlichen Größe nähert). Fig. 34 ſtellt die Linie vollſtändig dar, nur daß natürlich beide unendliche Erſtreckungen der Linie abgebrochen ſind. a iſt der Anfangspunkt, ab die Anfangsrichtung; die Drehungseinheit wurde = 1 R genommen. Der Strecker nähert ſich unendlich dem Parallelismus mit einer durch die abſolute Größe der Drehungseinheit beſtimmten Geraden, hier mit einem Lothe auf der Anfangsrichtung, und dieſe Annäherung geſchieht verhältnißmäßig bei weitem ſchneller, als bei den Halbſpiralen Fig. 27 und 30.

IV. Setzt man in der Gleichung $s = \frac{a(e^w - 1)}{e - 1}$ $a = 1$, $e = 2$, ſo entſteht

$$s = 2^w - 1.$$

Die Linie dieſer Gleichung iſt eine eigentliche Spirale, und zwar eine Spirale nach innen und außen, die ſich, ohne einen Uebergangspunkt zu haben, nach der einen Erſtreckung mit unendlich großer Drehung und Länge nach außen, nach der andern mit ebenfalls unendlich großer Drehung, aber das Ziel einer endlichen Länge unendlich verfolgend, nach innen windet. Anfangspunkt und Anfangsrichtung ſind gleichgültig für die Linie.

Dieſe (übrigens benannte und hinlänglich bekannte) Spirale ſtellt eine geometriſche Progreſſion dar, und zwar in Fig. 35 mit dem Exponenten 2, wenn die ganzen Umdrehungen die Gliederzahl bilden, und die Längen der einzelnen ganzen Umdrehungen den Werth der Glieder. Die Rechnung für die Zeichnung ließ ſich nach der Formel

$$w = \frac{\log.(1+s)}{\log.2}$$

bequem vornehmen.

Fig. 36 ſtellt ebenfalls die Linie dar, aber unter der obigen Bedingung einer geometriſchen Progreſſion mit dem Exponenten 64 entſprechend, weshalb denn der Zug gewaltig ausholt, und nur ein kleines Stück von ihm, etwas mehr als $1\frac{1}{4}$ Umdrehungen, gebildet werden konnte.

V. Gleichung: $s = a\,tg.\,w$.

Die Fig. 37 abgebildete Linie, deren Anfangsrichtung ab iſt, gehört zu den Parabeln; beide Arme ſind Strecker und identiſch. Sie ſchreiten entgegengeſetzt mit entgegengeſetzter Drehung ins Unendliche fort, der endlichen Drehungsgröße 1 R, und daher dem Parallelismus mit der Hauptaxe ac ohne Ende ſich nähernd.

Sechster Abschnitt.

Ableitung von relativen Eigenschaften ebener Curven.

Erstes Kapitel.

Die Rectification ebener Curven aus der ursprünglichen Gleichung.

§. 73.

Eine relative Eigenschaft eines geometrischen Gebildes stellt nach §. 22, 2 die Abhängigkeit dar, in welcher entweder das Gebilde selbst nach irgend einer Beziehung (Ausdehnung, Lage, Gestalt ꝛc.) oder doch einer seiner Theile, Bestandtheile, Grenzen ꝛc. zu einem anderweitig gesetzten Gebilde oder dessen Theilen ꝛc. steht. Soll also ausgemittelt werden, wie sich der Bogen einer Curve zu einer durch diesen Bogen geometrisch bestimmten Ge-

raden der Ausdehnung nach verhalte, ſo iſt dieſes die Unterſuchung einer relativen Eigenſchaft; denn die Curve ſelbſt wird hier in Relation zu einer neuen geometriſchen Beſtimmung geſetzt, nämlich zu der Geraden, mit der ſie verglichen werden ſoll.

§. 74.

Sei ac (Fig. 38, Taf. II) ein Bogen einer Krummen, deren Anfangspunkt a iſt. Ihre Richtungslinie in a oder die Anfangsrichtung ſei ab, in c ſei die Richtung kc. Die Richtungsveränderung des Bogens ac wird alſo durch den Winkel bhc ausgedrückt. Errichtet man nun auf ab im Punkte a ein Loth ag, und fällt auf die letzte Linie ein Loth von c aus, ſo iſt wegen des Parallelismus der Geraden ha und ef und der Gleichheit der Innenwechſelwinkel an Parallelen, $\angle bhc = \angle kef$. Alſo drückt kef die Richtungsveränderung oder Drehungsgröße des Bogens ac aus, und während $ac = s$, iſt $kef = w$. Zugleich bilden af und ef, und, wenn man gd parallel ef zieht, ag und gd x, y ein Syſtem rechtwinkliger Coordinaten für die Curve. af ſei die Abſciſſenlinie, alſo ef die Ordinate y für die Abſciſſe $af = x$.

Die Aufgabe iſt nun, die Länge eines Bogens (ac)

im Verhältniß zu der Richtungslinie (pa) oder dem Lothe (po), d. h. zu der Ordinate oder Abſciſſe des Bogens, oder auch umgekehrt, auszudrücken; alſo zunächſt den Zuſammenhang unter dem Differentiale des Bogens, dem Winkel (w) und dem Differentiale der Ordinate oder dem der Abſciſſe zu beſtimmen.

Setzt man zu dieſem Zwecke cd als das Differential des Bogens, ſo würde co das der Abſciſſe, de das der Ordinate ſein. cd iſt bekanntlich in dieſem Falle als eine unendlich kleine Gerade, d. h. der Größe ſeiner Sehne unendlich ſich nähernd, anzuſehen, ſo als ob die Tangente ck zugleich den Punkt d mit berühre, d. h. ſo, daß die Richtungslinie md ſich unendlich dem Zuſammenfallen mit ko nähere. Dann nähert ſich ∠mdg, der die Drehungsgröße des Bogens ad oder $s + ds$ ausdrückt, unendlich dem Winkel cdo (cd nun als unendlich kleine Gerade gedacht) oder dem ihm gleichen ∠kcf. Sobald alſo cd als Element des Bogens oder als Differential deſſelben gedacht wird, iſt cde einem rechtwinkligen Dreiecke gleich zu ſetzen, deſſen Hypotenuſe $cd = ds$, deſſen beide Katheten $ce = dx$, $de = dy$ und deſſen $\angle cde = \angle kcf = w$ iſt. Folglich hat man die Abhängigkeiten:

Linie dar. Die Anfangsrichtung ist gk; dem Parallelismus mit ihr nähert sich der gestreckte Zweig der Linie ohne Ende. Der Anfangspunkt liegt im Innern des gewundenen Zweiges, der diesem Punkte sich unendlich nähert. Im Punkte g ist $s = 1$ gesetzt, und $a = 1$ R.

II. Gleichung: $ws^2 + w = s^2$; daraus

$$w = \frac{s^2}{s^2+1}, \qquad s = \pm r\frac{w}{1-w}.$$

Die Linie hat zwei vom Anfangspunkte aus entgegengesetzt fortschreitende aber beide positiv sich wendende identische Arme, die bei unendlicher Länge einer endlichen Drehungsgröße ohne Ende sich nähern. Diese Größe ist die Drehungseinheit, auf deren absoluten Werth es also ankommt, und mit welchem die Gestalt der Curve sich ändert. In den Figuren 31, 32 und 33 ist dieser Werth = 1 R, 2 R, 4 R gesetzt. a ist der Anfangspunkt, ab die Anfangsrichtung.

III. Gleichung: $w \cdot 2^s = 2^s - 1$, daraus

$$w = \frac{2^s-1}{2^s} = 1 - \frac{1}{2^s}.$$

Die Linie ist eine Halbspirale, die jedoch zu einer andern Art derselben, als die beiden schon betrachteten gehört, und sich von ihnen dadurch wesentlich unterscheidet, daß sie nur aus einem einzigen

tificationsformel $dx = ds \cdot \sin. w$ entweder den Werth für w oder den für sin. w ein, nachdem man einen derselben aus der ursprünglichen Gleichung der Krummen berechnet hat, und verfährt übrigens wie unter 1.

§. 76.

Beispiel. Die Krumme zu rectificiren, deren ursprüngliche Gleichung ist

$$s = a(1 + tg.^2 w)^{\frac{1}{2}} - a.$$

Man berechne aus der gegebenen Gleichung zuerst cos. w; zu diesem Zwecke ist in die Gleichung für tg. w einzuführen cos. w. Es ist nach einem trigonometrischen Satze

$$\cos. w = \frac{1}{\sqrt{(1+tg.^2 w)}}, \text{ daher } \sqrt{(1+tg.^2 w)} = \frac{1}{\cos. w}.$$

Durch Einschiebung des letzteren Werthes in die gegebene Gleichung entsteht

$$s = a\left(\frac{1}{\cos. w}\right)^3 - a$$

$$\cos. w = \sqrt[3]{\frac{a}{s+a}}.$$

Setzt man diesen Werth für cos. w in die Rectificationsformel (3) ein, so erhält man

$$dy = \left(\frac{a}{s+a}\right)^{\frac{1}{3}} ds.$$

Dieſe (übrigens benannte und hinlänglich bekannte) Spirale ſtellt eine geometriſche Progreſſion dar, und zwar in Fig. 35 mit dem Exponenten 2, wenn die ganzen Umdrehungen die Gliederzahl bilden, und die Längen der einzelnen ganzen Umdrehungen den Werth der Glieder. Die Rechnung für die Zeichnung ließ ſich nach der Formel

$$w = \frac{\log.(1+s)}{\log.2}$$

bequem vornehmen.

Fig. 36 ſtellt ebenfalls die Linie dar, aber unter der obigen Bedingung einer geometriſchen Progreſſion mit dem Exponenten 64 entſprechend, weshalb denn der Zug gewaltig ausholt, und nur ein kleines Stück von ihm, etwas mehr als $1\frac{1}{4}$ Umdrehungen, gebildet werden konnte.

V. Gleichung: $s = a\,tg.\,w$.

Die Fig. 37 abgebildete Linie, deren Anfangsrichtung ab iſt, gehört zu den Parabeln; beide Arme ſind Strecker und identiſch. Sie ſchreiten entgegengeſetzt mit entgegengeſetzter Drehung ins Unendliche fort, der endlichen Drehungsgröße 1 R, und daher dem Parallelismus mit der Hauptaxe ac ohne Ende ſich nähernd.

$$s = \frac{9y+4p}{27}\sqrt{\frac{9y+4p}{p}} - \frac{8}{27}p,$$

wodurch ſich die Curve als die Neil'ſche Parabel zu erkennen giebt. Weiter unten beſtätigt ſich dieſes noch auf eine andere Weiſe.

§. 77.

Iſt zum Behufe der Rectification außer der urſprünglichen Gleichung auch die Gl. für rechtwinklige Coordinaten gegeben, ſo iſt die Rectification durch bloße Differentiation der Coordinaten-Gleichung und eine Einſchiebung zu bewerkſtelligen. Die Bequemlichkeit und Schicklichkeit der Anwendung hängt jedoch von der Eigenthümlichkeit des beſonderen Falles ab. Die beſtändigen Größen der beiden gegebenen Gleichungen müſſen ſich entſprechen, welches gewöhnlich ſchon von ſelbſt Statt findet, da meiſtentheils aus einer von den Gleichungen die andere wird hergeleitet worden ſein.

Das Verfahren iſt dieſes. Man berechnet aus der Coordinaten-Gleichung das Differential-Verhältniß $\frac{dx}{dy}$. Dieſes iſt einerlei mit tg. w. (Denn in Fig. 38 iſt im Dreiecke ode, $\frac{ce}{de}$ = tg. ode = tg. w). Man ſchiebt den Werth des Differential-

Verhältnisses, sei er durch x oder durch y ausgedrückt, statt tg. w in die ursprüngliche Gleichung.

Beispiel. Die Coordinaten-Gleichung der Neil'schen Parabel $y^3 = px^2$, (wo $p = \frac{27}{8}a$ der ursprünglichen Gleichung) giebt durch Differentiirung $\frac{dx}{dy} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{y}{p}} = \text{tg. w.}$ Also $\text{tg.}^2 w = \frac{9y}{4p} = \frac{2y}{3a}$.

Durch Einschiebung dieses Werthes in die ursprüngliche Gleichung entsteht

$$s = a\left(1 + \frac{2y}{3a}\right)^{\frac{3}{2}} - a,$$

wie oben.

§. 78.

Aus dem §. 75 gezeigten Verfahren geht durch bloße Umkehrung desselben die Methode hervor, aus der Rectification einer Krummen diese selbst (d. h. ihre ursprüngliche Gleichung, und daraus, wenn man will, ihre Coordinaten-Gleichung) zu bestimmen. Man differentiirt die Rectification (nachdem man darin y oder x durch s ausgedrückt, sofern dies bequemer sein sollte als die nachherige Einschiebung des nach Anleitung der gegebenen Gleichung zu bestimmenden durch s auszudrückenden Werthes von y oder x), giebt ihr die Form $\frac{dy}{ds} = \varphi(s)$ oder $\frac{dx}{ds} = f(s)$ und setzt (nach §. 75, 1 und 2,)

cos. w oder sin. w an die Stelle der Differential-Quotienten.

Beispiel 1. Welche ist die Krumme, deren Rectification ist $y = a \cdot s^2$?

Wegen $dy = 2as \cdot ds$ ist $\frac{dy}{ds} = 2as$ und daher die ursprüngliche Gleichung $2a \cdot s = \cos. w$.

Beispiel 2. Man sucht die ursprüngliche Gleichung der Curve, deren Bogen den Quadraten der Ordinate gleichen.

Die Differentialgleichung der Rectification $ay^2 = s$ giebt $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{as}} = \cos. w$. Oder in anderer Form $4as - 1 = tg^2 w$. Daher für $a = 1$, $\frac{1}{2\sqrt{s}} = \cos. w$, oder auch $4s - 1 = tg.^2 w$.

Beispiel 3. Die Rectification sei $s = \pm r(a^2y^2 + y^2)$, welche ist die Linie? Man findet $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{r(a^2+1)} = \cos. w$, oder in anderer Gestalt $a = tg. w$. Die Linie ist also die Gerade. Denn man soll dem Winkel irgend einen beständigen Werth geben, dann findet das Verlangte Statt. Der eine Schenkel des Winkels stellt also selbst die gesuchte Linie dar.

Beispiel 4. Giebt es eine Krumme, deren Ordinaten, oder eine, deren Abscissen den Bogen gleichen? — Nein, denn man erhält als Gleichung der einen $\cos. w = 1$, als Gleichung der anderen

n. w = 1. Dieſe Linien ſind unmöglich, wie an ſieht.

Betrachtungen dieſer Art ſind ſo leicht als in-ereſſant und verlocken zu einer Mannigfaltigkeit von eiſpielen. Doch laſſe ich es an dieſem Orte bei n hergeſetzten bewenden, da der Leſer ermüden uß, wenn nicht eine weitere Unterſuchung eſer abſolut rectificablen Curven ſeinem Intereſſe ue Anregung giebt.

§. 79.

Aus den in dieſem Kapitel angegebenen Me-oden gehen noch folgende bemerkenswerthe allge-eine Sätze hervor:

1. Alle Curven von algebraiſcher urſprünglicher Gleichung haben eine transcendente Rectificationsformel, ſind alſo nicht abſolut rectificabel. (§. 75).
2. Alle abſolut rectificabeln Curven haben eine transcendente urſprüngliche Gleichung. (§. 78).

Durch weitere Verfolgung der Betrachtungen §. 78) läßt ſich näher beſtimmen, welche Formen ie urſprünglichen und Coordinaten-Gleichungen ha-en müſſen, wenn die ſtrenge Rectification ihrer Cur-en möglich ſein ſoll.

cos. w oder sin. w an die Stelle der Differential-Quotienten.

Beiſpiel 1. Welche iſt die Krumme, deren Rectification iſt $y = a \cdot s^2$?

Wegen $dy = 2as \cdot ds$ iſt $\frac{dy}{ds} = 2as$ und daher die urſprüngliche Gleichung $2a \cdot s = \cos. w$.

Beiſpiel 2. Man ſucht die urſprüngliche Gleichung der Curve, deren Bogen den Quadraten der Ordinate gleichen.

Die Differentialgleichung der Rectification $ay^2 = s$ giebt $\frac{dy}{ds} = \frac{1}{2\sqrt{as}} = \cos. w$. Oder in anderer Form $4as - 1 = tg^2 w$. Daher für $a = 1$, $\frac{1}{2\sqrt{s}} = \cos. w$, oder auch $4s - 1 = tg.^2 w$.

Beiſpiel 3. Die Rectification ſei $s = \pm r(a^2y^2 + y^2)$, welche iſt die Linie? Man findet $\frac{dy}{ds} = \pm \frac{1}{r(a^2+1)} = \cos. w$, oder in anderer Geſtalt $a = tg. w$. Die Linie iſt alſo die Gerade. Denn man ſoll dem Winkel irgend einen beſtändigen Werth geben, dann findet das Verlangte Statt. Der eine Schenkel des Winkels ſtellt alſo ſelbſt die geſuchte Linie dar.

Beiſpiel 4. Giebt es eine Krumme, deren Ordinaten, oder eine, deren Abſciſſen den Bogen gleichen? — Nein, denn man erhält als Gleichung der einen $\cos. w = 1$, als Gleichung der anderen

n. w = 1. Dieſe Linien ſind unmöglich, wie an ſieht.

Betrachtungen dieſer Art ſind ſo leicht als in-reſſant und verlocken zu einer Mannigfaltigkeit von eiſpielen. Doch laſſe ich es an dieſem Orte bei n hergeſetzten bewenden, da der Leſer ermüden uß, wenn nicht eine weitere Unterſuchung eſer abſolut rectificablen Curven ſeinem Intereſſe ue Anregung giebt.

§. 79.

Aus den in dieſem Kapitel angegebenen Me-oden gehen noch folgende bemerkenswerthe allge-eine Sätze hervor:

1. Alle Curven von algebraiſcher urſprünglicher Gleichung haben eine transcendente Rectificationsformel, ſind alſo nicht abſolut rectificabel. (§. 75).
2. Alle abſolut rectificabeln Curven haben eine transcendente urſprüngliche Gleichung. (§. 78).

Durch weitere Verfolgung der Betrachtungen §. 78) läßt ſich näher beſtimmen, welche Formen ie urſprünglichen und Coordinaten-Gleichungen ha-en müſſen, wenn die ſtrenge Rectification ihrer Cur-en möglich ſein ſoll.

Zweites Kapitel.

Ableitung der urſprünglichen Gleichung aus der Gleichung für rechtwinklige Coordinaten.

§. 80.

Die Aufgabe, aus der urſprünglichen Gleichung die Gleichung für Coordinatenſyſteme zu entwickeln, d. h. das Geſetz der Flächenbildung aufzufinden, iſt eine weſentliche, die Eigenſchaft aber, welche ihre Löſung ergiebt, eine relative. Denn dieſe Eigenſchaft ſagt eine Abhängigkeit aus unter Größenbeſtimmungen (den Coordinaten), die nicht in dem Begriffe der Curve liegen. Daher gehört dieſe Aufgabe in dieſen Abſchnitt.

Im gegenwärtigen Kapitel ſoll zuerſt das in der Ueberſchrift bemerkte umgekehrte Problem behandelt werden.

§. 81.

Will man die urſprüngliche Gleichung einer ebenen Linie aus deren Gleichung für rechtwinklige Coordinaten finden, ſo differentiire man dieſe und be-

rechne aus der Differential-Gleichung $\frac{dx}{dy}$. Der Werth dieses Verhältnisses, der entweder durch y oder durch x ausgedrückt erscheint, gleicht tg. w. Man setze diese Gleichung und berechne aus ihr die darin vorkommende Coordinate, sei es y oder x, worauf man wieder differentiirt, und dadurch entweder dy oder dx durch w und dw ausgedrückt erhält. Diese Function von w wird alsdann dem Werthe von dy oder dx, der im vorigen Kapitel (§. 74, 3 und 4) gefunden wurde, nämlich ds . cos. w oder ds . sin. w gleichgesetzt, wodurch man eine Differential-Gleichung unter w und s bekommt. Die Integration derselben liefert die geforderte Gleichung.

§. 82.

Beispiel 1. Des Kreises Coordinaten-Gleichung aus dem Scheitel ist $y^2 = 2rx - x^2$. Aus ihrer Differential-Gleichung findet man

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x} = \frac{r(2rx-x^2)}{r-x};$$

daher

$$\frac{2rx-x^2}{(r-x)^2} = tg.^2 w,$$

$$-\frac{r^2 tg.^2 w}{1+tg.^2 w} = x^2 - 2rx.$$

Aber $\frac{\text{tg.}^2 w}{1+\text{tg.}^2 w} = \text{sin.}^2 w$, daher durch Einschiebung und durch Zuzählung von r^2

$$r^2(1 - \text{sin.}^2 w) = x^2 - 2rx + r^2.$$

Da $1 - \text{sin.}^2 w = \text{cos.}^2 w$, so erhält man hieraus

$$r \mp r \,.\, \text{cos.}\, w = x, \text{ und durch Differentiation}$$
$$\mp r \,.\, \text{sin.}\, w \,.\, dw = dx.$$

Nun ist nach (§. 74, 4) $ds \,.\, \text{sin.}\, w = dx$, also

$$\mp r \,.\, \text{sin.}\, w \,.\, dw = \text{sin.}\, w \,.\, ds,$$
$$\mp r dw = ds; \text{ integrirt}$$
$$\mp rw = s.$$

Dasselbe Ergebniß entwickelt sich etwas leichter, wenn man das anfängliche Differential-Verhältniß statt durch x durch y ausdrückt. Die Rechnung steht so:

Aus der gegebenen Gl. ist $x = r \mp \sqrt{(r^2 - y^2)}$, daher nach geschehener Differentiation

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-y}{\sqrt{(r^2 - y^2)}} = \text{tg.}\, w,$$
$$y^2 = \frac{r^2 \,\text{tg.}^2 w}{1 + \text{tg.}^2 w},$$
$$-y = \mp r \,.\, \frac{\text{tg.}\, w}{\sqrt{(1 + \text{tg.}^2 w)}},$$
$$y = \mp r \,.\, \text{sin.}\, w,$$
$$dy = \mp r \,.\, \text{cos.}\, w \,.\, dw.$$

Daher wegen (§. 74, 3)

$$\frac{\pm r \cos. w \, dw = ds \cdot \cos. w}{\pm rw = s.}$$

Die Constante findet sich hier sowohl als bei der ersten Berechnung $= 0$. Das Ergebniß liefert also (wie es denn sein muß) die ursprüngliche Kreisgleichung in der einfachsten Form.

§. 83.

Beispiel 2. Aus der Coordinaten-Gleichung der Neil'schen Parabel ihre ursprüngliche Gleichung abzuleiten.

Der gegebenen Gleichung $y^3 = px^2$ Differentialgleichung ist $\frac{3}{2\sqrt{p}} \cdot y^{\frac{1}{2}} dy = dx$; also, wenn man Kürze halber $\frac{3}{2\sqrt{p}} = n$ setzt,

$$\frac{n \cdot \sqrt{y} = \frac{dx}{dy} = tg. w}{y = \frac{tg.^2 w}{n^2}.}$$

Um zu differentiiren setze man $tg. w = v$, so ist

$$dy = \frac{2v}{n^2} dv.$$

Da nun $dv = d\, tg. w = \frac{dw}{\cos.^2 w}$, so haben wir, wenn für v dessen Werth wieder eingesetzt wird,

$$dy = \frac{2\,tg.\,w}{n^2\,cos.^2\,w}\,dw.$$

Daraus und aus (§. 74, 3) folgt die Differentialgleichung

$$ds = \frac{2\,tg.\,w}{n^2\,.\,cos.^3\,w}\,dw.$$

Um zu integriren kann man sich des Satzes bedienen

$$\int \frac{dw\,sin.^p\,w}{cos.^q\,w} = \frac{1}{q-1}\,\frac{sin.^{p+1}\,w}{cos.^{q-1}\,w} - \frac{p-q+2}{q-1}\int \frac{dw\,sin.^p\,w}{cos.^{q-2}\,w}.$$

Man wechselt zu diesem Zwecke tg. w der Gleichung mit $\frac{sin.\,w}{cos.\,w}$ aus, und erhält darauf durch die Integrirung

$$s = \frac{2}{3n^2}\left[\frac{1}{cos.^3\,w}\right] + C,$$

oder, für n den Werth eingeschoben,

$$s = \frac{\frac{2}{27}p}{cos.^3\,w} + C.$$

Da nun wegen $y = \frac{tg.^2\,w}{n^2}$ für $w = 0$ auch $y = 0$, so findet sich aus $dy = ds\,cos.\,w$ (§. 74, 3) durch Einschiebung dieser Werthe, für $w = 0$ auch $s = 0$, indem $cos.\,0 = 1$. Daher

$$0 = \frac{\frac{2}{27}p}{cos.^3\,.\,0} + C,$$

$$-\frac{8}{27}p = C,$$

woraus als urſprüngliche Gleichung der Neil'ſchen Parabel, wenn zugleich $\frac{8}{27}p = a$ geſetzt wird, folgt

$$s = \frac{a}{\cos.^3 w} - a.$$

§. 84.

Beiſpiel 3. Die urſprüngliche Gleichung der apolloniſchen Parabel aus ihrer Coordinaten-Gleichung herzuleiten.

Iſt die Gleichung für ein ſchiefwinkliges Coordinatenſyſtem gegeben, ſo berechnet man ſie daraus zuvor für das rechtwinklige. Dieſes wird hier, wie ſchon früher ſtillſchweigend, vorausgeſetzt.

Aus der gegebenen Gleichung $y^2 = px$ entſteht, wenn man differentiirt,

$$\frac{2}{p} \cdot y = \frac{dx}{dy} = \text{tg. } w, \text{ daher}$$

$$y = \frac{p}{2} \text{ tg. } w,$$

woraus man durch Differentiation erhält

$$dy = \frac{p}{2} \cdot \frac{dw}{\cos.^2 w}.$$

Nun iſt nach (§. 74, 3) $dy = ds \cdot \cos. w$; demnach

$$ds = \frac{p}{2} \cdot \frac{dw}{\cos.^3 w}.$$

Die Integration wird am bequemſten durch die Formel vermittelt

$$\int \frac{dw}{\cos.^q w} = \frac{\sin. w}{(q-1)\cos.^{q-1} w} + \frac{q-2}{q-1}\int \frac{dw}{\cos.^{q-2} w}.$$

Dadurch erhält man

$$s = \frac{p}{2}\left[\frac{\sin. w}{2.\cos.^2 w} + \frac{1}{2}\int \frac{dw}{\cos. w}\right],$$

und weil $\int \frac{dw}{\cos. w} = \text{log. nat. tang. } (45° + \frac{1}{2} w)$

$$s = \frac{p}{4}\left[\frac{\text{tg. } w}{\cos. w} + \text{log. nat. tang. } (45° + \tfrac{1}{2} w)\right] + C$$

oder auch, da $\frac{1}{\cos. w} = \text{sec. } w$, und, nach einem goniometriſchen Satze, $\text{tg. } (45° + \frac{1}{2} w) = \text{tg. } w + \text{sec. } w$,

$$s = \tfrac{p}{4}[\text{tg. } w \,.\, \text{sec. } w + \text{log. nat. } (\text{tg. } w + \text{sec. } w)] + C.$$

Da für $w = 0$ auch $s = 0$, wie man leicht findet, ſo iſt, weil $\text{tg. } 0 = 0$ und $\text{sec. } 0 = 1$,

$$0 = \tfrac{p}{4}(0 + \text{log. nat. } 1) + C.$$

Aber auch $\text{log. nat. } 1 = 0$, daher $C = 0$. Demnach iſt

$$s = \tfrac{p}{4}[\text{tg. } w \,.\, \text{sec. } w + \text{log. nat. } (\text{tg. } w + \text{sec. } w)]$$

die vollſtändige urſprüngliche Gleichung für die gemeine Parabel.

Drittes Kapitel.

Ableitung der Gleichung für rechtwinkelige Coordinaten aus der ursprünglichen Gleichung.

§. 85.

Es sind hier zwei verschiedene Methoden anwendbar.

1. Die erste ist das umgekehrte Verfahren des vorigen Kapitels. Man differentiire die gegebene ursprüngliche Gleichung und berechne daraus den Werth von ds . sin. w, um ihn $= dx$ zu setzen, oder den Werth von ds . cos. w, um ihn dy gleich zu stellen. Die hervorgegangene Differentialgleichung wird integrirt, wobei die sofortige Hinzufügung der Constante nicht versäumt werden darf. Durch die so entstandene Gleichung ist die Abhängigkeit unter w und x oder unter w und y gegeben. Man berechnet daraus den Werth von tg. w und setzt ihn $= \frac{dx}{dy}$, oder man leitet daraus den Werth einer andern brauchbaren Function von w ab

und ſetzt ihn dem aus $\text{tg. } w = \frac{dx}{dy}$ folgenden Werthe derſelben Function gleich. Daraus geht eine Differentialgleichung hervor, deren Integration die geforderte Gleichung liefert.

Es läßt ſich noch eine kleine Abänderung in dieſem Verfahren treffen, die zuweilen bequem iſt. Nachdem nämlich eine der Gleichungen zwiſchen w und x oder w und y gefunden iſt, ſtellt man daraus cos. w oder sin. w dar. Der Werth davon wird $= \frac{dy}{r[(dx)^2+(dy)^2]}$ (im Falle cos. w berechnet wurde), hingegen $= \frac{dx}{r[(dx)^2+(dy)^2]}$ (im anderen Falle) geſetzt, und die ſo gebildete Differentialgleichung integrirt.

Weil nämlich, wie bekannt, $(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2$, ſo hat man aus $dy = ds \,.\, \text{cos. } w$ durch Einſchiebung des Werthes von ds

$$\text{cos. } w = \frac{dy}{r[(dx)^2+(dy)^2]}$$

und ebenſo aus $dx = ds \,.\, \text{sin. } w$

$$\text{sin. } w = \frac{dx}{r[(dx)^2+(dy)^2]}$$

2. Ein zweites nicht ſelten mit Vortheil anzuwendendes Verfahren beſteht darin, daß man zuerſt auf die oben (unter 1) angegebene Weiſe beide Gleichungen, ſowohl die zwiſchen w und x als

die zwiſchen w und y ſucht, und durch Ableitung von w oder einer und derſelben Function von w aus beiden Gleichungen eine Gleichung zwiſchen x und y zu Stande bringt.

Dieſe Ableitungsart, nur unbedeutend modificirt, kann auch ſo dargeſtellt werden:

Man ſchiebt in die Gleichungen

$$dy = ds \,.\, \cos. w$$
$$dx = ds \,.\, \sin. w$$

für ds den aus der Differential-Gleichung der Gegebenen erhaltenen Werth ein, integrirt und berechnet aus beiden Integralgleichungen eine und dieſelbe Function von w, deren Werthe einander gleich geſetzt werden.

§. 86.

Beiſpiel 1. Aus der urſprünglichen Gleichung des Kreiſes deſſen Coordinatengleichung zu finden.

Erſte Methode. Aus $rw = s$ iſt $rdw = ds$, daher $r \,.\, \sin. w\, dw = ds \,.\, \sin. w$. Dies letztere gleicht dx, daher

$$r \,.\, \sin. w\, dw = dx; \text{ integrirt}$$
$$-r \cos. w + C = x.$$

Da nun in der gegebenen Gleichung für $s = 0$ auch $w = 0$, so ist wegen $dx = ds \cdot \sin. w$ für $w = 0$ auch $x = 0$. Die Einschiebung dieser beiden Werthe in die Integralgleichung ergiebt

$$-r \cdot 1 + C = 0$$

$$C = r; \text{ also}$$

$$r - r \cos. w = x$$

$$\cos. w = \frac{r - x}{r}$$

$$\frac{1}{1 + tg.^2 w} = \left(\frac{r - x}{r}\right)^2$$

$$\frac{(dy)^2}{(dy)^2 + (dx)^2} = \left(\frac{r - x}{r}\right)^2$$

$$dy = \frac{r - x}{r(2rx - x^2)}\, dx; \text{ integrirt}$$

$$y = r(2rx - x^2);$$

die Constante ist 0.

Zweite Methode. Um zuerst die Gleichung zwischen w und y zu finden setze man in Folge von $rdw = ds$

$$r \cdot \cos. w\, dw = ds \cdot \cos. w;$$

$$ds \cdot \cos. w = dy$$

$$r \cdot \cos. w\, dw = dy; \text{ integrirt}$$

$$r \cdot \sin. w = y.$$

Die Conſtante ergiebt ſich $=0$, wegen $\sin.0=0$. Aus der Integralgleichung folgt

$$\sin.^2 w = \frac{y^2}{r^2}.$$

Die Gleichung zwiſchen w und x iſt ſchon bei der Berechnung nach der erſten Methode aufgeſtellt, ſie hieß $\cos. w = \frac{r-x}{r}$, woraus

$$\cos.^2 w = \left(\frac{r-x}{r}\right)^2.$$

Da nun $\sin.^2 w + \cos.^2 w = 1$, ſo folgt

$$\frac{y^2}{r^2} + \left(\frac{r-x}{r}\right)^2 = 1$$

$$y^2 = 2rx - x^2,$$

als die rechtwinklige Coordinaten-Gleichung des Kreiſes aus dem Scheitel.

§. 87.

Beiſpiel 2. Welche Coordinatengleichung hat die Curve, deren Begriff in der Gleichung $s = \frac{a}{\cos.^3 w} - a$ gegeben iſt?

Wir wollen zu dieſer Unterſuchung die zweite Methode brauchen.

$$dy = ds \cdot \cos. w,$$

daher, wenn man für s den Werth aus der Gegebenen einſchiebt,

$$dy = d\left[\frac{a}{\cos.^3 w} - a\right] . \cos. w.$$

Um $\frac{a}{\cos.^3 w} - a$ zu differentiiren, ſetze man $\cos. w = z$, woraus $-\sin. w\, dw = dz$. Es iſt nun $d\left(\frac{a}{z^3} - a\right)$ $= -3az^{-4}\, dz = -\left(\frac{3a}{\cos.^4 w}\right)(-\sin. w\, dw)$ $= \frac{3a . \sin. w}{\cos.^4 w} dw$. Daher

$$dy = \frac{3a . \sin. w}{\cos.^3 w} dw; \text{ integrirt}$$

$$(1)\quad y = 3a\left(\tfrac{1}{2}\frac{\sin.^2 w}{\cos.^2 w}\right) = \tfrac{3}{2} a \operatorname{tg}.^2 w.$$

Dieſes Integral ergiebt ſich ſofort nach der §. 83 angeführten Integrationsformel. Da für $w = 0$, $s = 0$, ſo iſt auch für $w = 0$, $y = 0$. Daraus geht die Conſtante $= 0$ hervor.

Ferner iſt zu dem beabſichtigten Zwecke der Satz

$$dx = ds . \sin. w$$

auf ähnliche Weiſe zu behandeln. Nach der Einſchiebung des Werthes von s hat man durch Differentiirung dieſes Werthes

$$dx = \frac{3a . \sin.^2 w}{\cos.^4 w} dw,$$

woraus die Integralgleichung hervorgeht

$$(2)\quad x = 3a\left(\tfrac{1}{3}\frac{\sin.^3 w}{\cos.^3 w}\right) = a \operatorname{tg}.^3 w.$$

Auch hier iſt die Conſtante $= 0$.

Aus (1) entſteht durch algebraiſche Umwandlung

$$\sqrt[3]{\frac{2y}{3a}} = \text{tg. w},$$

aus (2) desgleichen $\sqrt[3]{\frac{x}{a}} = \text{tg. w}$;

daher

$$\frac{\sqrt[3]{\frac{2y}{3a}} = \sqrt[3]{\frac{x}{a}}}{y^3 = \frac{27}{8} a \cdot x^2},$$

oder, $a = \frac{8}{27} p$ geſetzt (vergl. §. 83),

$$y^3 = px^2.$$

§. 88.

Beiſpiel 3. Die urſprüngliche Gleichung einer Curve iſt $2as = \cos. w$, man ſucht ihre Gleichung für rechtwinklige Coordinaten.

I. Die Differentiation der Gegebenen ergiebt

$$(1) \quad ds = -\frac{1}{2a} \sin. w \, dw.$$

Durch Einſchiebung dieſes Werthes von ds in

$$(2) \quad dy = ds \cdot \cos. w \text{ entſteht}$$

$$dy = -\frac{1}{2a} \sin. w \cdot \cos. w \, dw.$$

Die Integration dieſer Gleichung nach dem Satze

$$\int \sin. w \cdot \cos.^n w \, dw = -\frac{1}{n+1} \cos.^{n+1} w$$

liefert das Integral

$$(3)\quad y = \frac{1}{4a} \cdot \cos.^2 w + C.$$

Für $w = 0$ ist aus der Gegebenen $s = \frac{1}{2a}$; ner ist für $w = 0$ aus (2) $y = s = \frac{1}{2a}$. Einschiebung dieser Werthe von w und y in erhält man

$$C = \frac{1}{4a},$$

daher das vollständige Integral

$$y = \frac{\cos.^2 w + 1}{4a}.$$

Daraus ist

$$(4)\quad \sqrt{4ay - 1} = \cos. w,$$

$$(5)\quad \sqrt{2 - 4ay} = \sin. w,$$

$$(6)\quad \text{Arc. cos.} \sqrt{4ay - 1} = w.$$

II. Setzt man den in (1) für (ds) gefund Werth ein in

$$(7)\quad dx = ds \,.\, \sin. w,$$

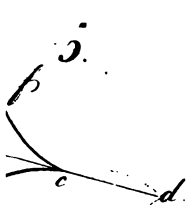
so geht hervor

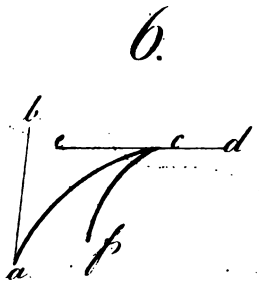
$$dx = -\frac{1}{2a} \cdot \sin.^2 w \, dw.$$

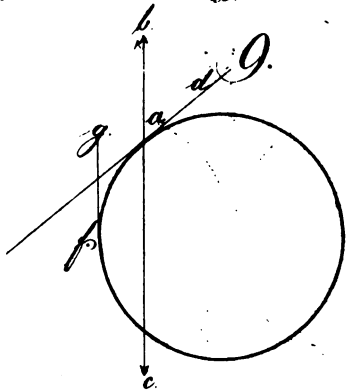
Durch Anwendung der Integrationsformel

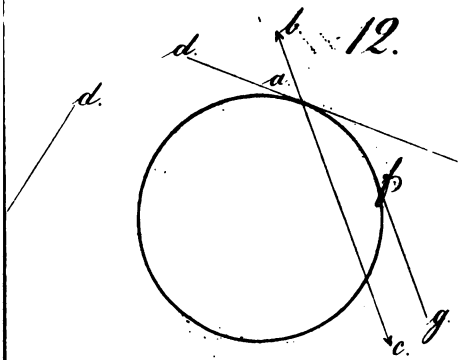
$$\int \sin.^m w \,.\, dw = -\frac{\cos. w \,.\, \sin.^{m-1} w}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin.^{m-2} w \,.\, dw$$

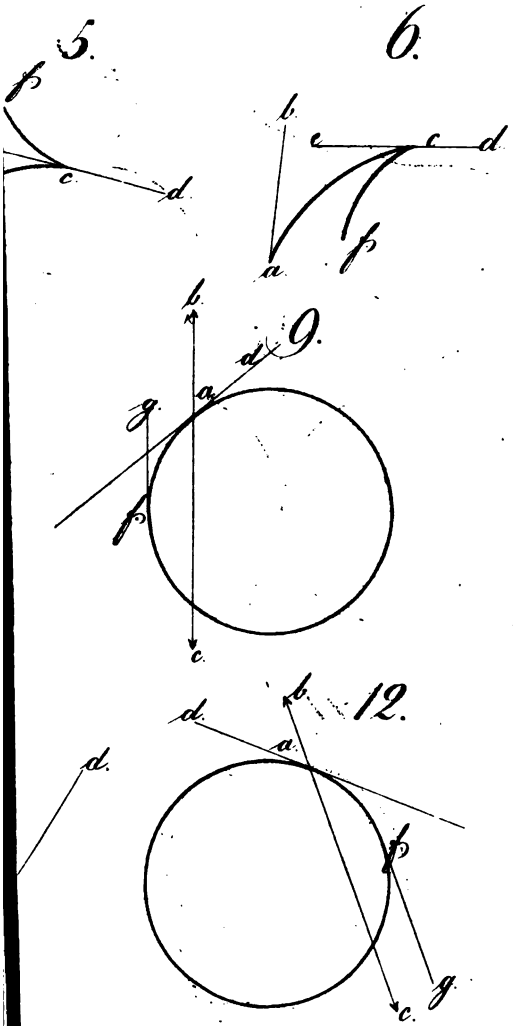
folgt hieraus die Integralgleichung

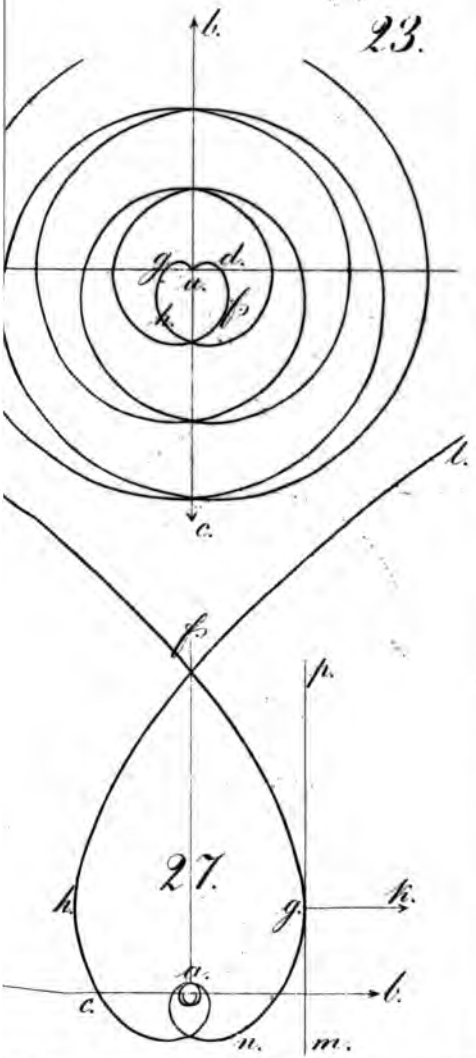

5.
f
c
d

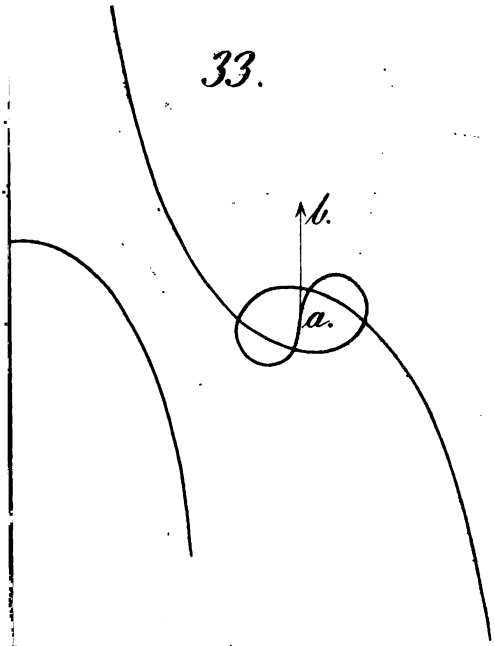

6.
b
c
c
d
a
f

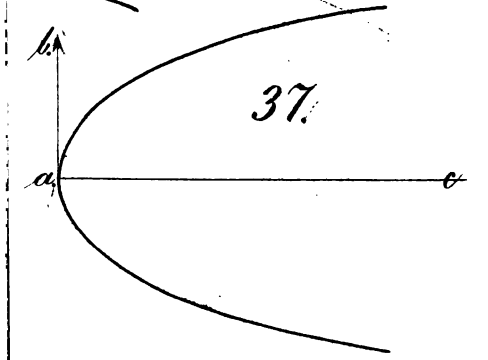

9.
b
d
a
g
f
c


12.
d.
b
d.
a
f
g
c.


5.
6.
9.
12.


b.
23.
g.
d.
a.
h.
f.
c.
b.
f.
p.
27.
h.
g.
k.
a.
c.
b.
n.
m.


33.
b.
a.


b.
37.
a.
c

$$x = \frac{\cos. w \,.\, \sin. w - w}{4a} + C.$$

Für $w = 0$ ist wegen $\sin. 0 = 0$ aus (7) auch $x = 0$, daher $C = 0$, demnach das vollständige Integral

$$x = \frac{\cos. w \,.\, \sin. w - w}{4a}.$$

Hieraus entsteht, wenn man für cos. w, sin. w und w die unter (4), (5) und (6) berechneten Werthe einschiebt

$$(8) \quad x = \frac{+\sqrt{(4ay-1)(2-4ay)} - \text{Arc. cos.} \sqrt{4ay-1}}{4a}$$

als die geforderte Gleichung für rechtwinklige Coordinaten.

Anmerk. Um diese Curve aus der ursprünglichen Gleichung zu rectificiren schiebt man aus letzterer den Werth von cos. w ein in (2) und erhält

$dy = 2as \,.\, ds$, woraus durch Integration

$$(9) \quad y = as^2 + C.$$

Für $w = 0$ ergiebt sich aus $2as = \cos. w$, $s = \frac{1}{2a}$ und aus (2) $y = s$, daher durch Einschiebung dieser Werthe von y und s in (9)

$$C = \frac{1}{4a}.$$

Also die vollständige Rectification

$$y = as^2 + \frac{1}{4a}.$$

Berechnet man aus dieſer Formel, oder auch nur aus der $y = as^2$ wiederum die urſprüngliche Gleichung, ſo iſt ſie für beide Fälle

$$2as = \cos. w.$$

Vergl. §. 78, Beiſpiel 1.

Die durch die Coordinaten-Gleichung (8) gegebene Curve hat alſo die merkwürdige Eigenſchaft, daß ihre Bogen ſich wie die Quadratwurzeln aus den Ordinaten verhalten.

Schlußbetrachtungen.

Vergleicht man die Coordinaten-Methode mit der neuen, so scheint es auf den ersten Blick, als ob sie wegen ihrer großen Verschiedenheit immer fremdartig einander gegenüber stehen, und, in ungenügender Zweiheit beharrend, der Entwickelung eines wissenschaftlichen Organismus der höheren Geometrie, dessen erste formale Bedingung Einheit ist, hemmend in den Weg treten müßten. Aber eine nähere Betrachtung zeigt gleich, daß es umgekehrt ist, und die ursprüngliche Weise, die Curven zu behandeln, auf ein förmliches System der sämmtlichen analytischen Methoden führt, nach denen Linie, Fläche und Körper untersucht werden können.

Jede Methode, die im Systeme auftreten soll, muß an ihrem Orte, also in eigenthümlicher Beziehung, eine ursprüngliche sein. Sie ließe sich sonst nicht als nothwendig deduciren, und fiele durch ihre

willkührliche Hinstellung aus dem Zusammenhange des Ganzen. Die neue Methode ist nur aus dem Grunde vorzugsweise die ursprüngliche genannt, weil sie die ausgedehnten Raumgrenzen, gebogene Linien und Flächen, absolut denkt und ausschließlich in diesem Sinne betrachtet, die Coordinaten-Methode dagegen sie selbst relativ, und nur die von ihnen umschlossenen Flächen und Körperräume absolut faßt. In der letzteren Rücksicht ist also die Coordinaten-Methode ebenfalls ursprünglich; sie wird daher, sobald sie die relative Betrachtung der Grenzen aufgiebt, ebenfalls zu einem durchaus ursprünglichen Verfahren. Der Gegensatz der abgeleiteten und ursprünglichen Methode ist dann wieder aufgehoben.

Demnach ist das gemeinschaftliche Princip beider analytischen Methoden die Erzeugung oder Definition der geometrischen Objecte durch die gegenseitige Abhängigkeit ihrer eigentlichen Elemente, und ihre Behandlung durch die Analyse dieses Abhängigkeitgesetzes. Dieses gilt von Linien, Flächen und Körpern, mögen dabei die Flächen als Ganze, wie nach der neuen Methode, oder von gesetzmäßigen Grenzen durchschnitten gedacht werden, wie nach der alten. Hierdurch treten beide Methoden in ei-

ner gesetzmäßigen Entwickelung der Verfahrungsarten vereinigt auf, und die Coordinaten-Methode unterscheidet sich nur dadurch, daß sie immer die Abhängigkeit der Dimensionen des Ausgedehnten auffaßt.

1.) Es ist die Abhängigkeit zwischen Fortschritt und einfacher Drehung eines (linienbildenden) Punktes gesetzt: ebene Curve an sich. (Neue Methode, §. 3 bis 8.)

2.) Es ist die Abhängigkeit zwischen der Länge einer (flächenbildenden) Geraden und der Größe ihrer fortschreitenden oder drehenden Bewegung in einer Ebene gedacht: gesetzmäßig begrenzte Ebene, als Fläche. Ihre Grenze wiederholt die ebene Curve (1). (Coordinaten-Methode.)

3.) Ein Punkt schreitet bei gedoppelter Drehung gesetzmäßig fort: die doppelt gekrümmte Linie. (Neue Methode, §. 16.)

4.) Eine unendliche (gerade oder krumme) Linie bewegt sich flächenbildend: ursprüngliche Bildung der gebogenen Fläche. (Neue Methode, §. 17.)

5.) Eine Linie bewegt sich wie unter (4), aber sie selbst verändert dabei ihre Länge gesetzmäßig. Sie bildet eine durch die Abhängigkeit der Di-

mensionen bestimmte, gesetzmäßig begrenzte krumme Fläche. (Vergl. 2.) Ihre Grenze wiederholt die doppelt gekrümmte Linie (3). (Coordinaten-Methode.)

Man denke z. B. eine parallel mit sich selbst auf irgend eine Weise fortschreitende archimedische Spirale, die aber beim Anfange ihres Fortschrittes sich als ebene Curve erst zu bilden anfängt und mit ihrer Weiterbewegung wachsend darin fortfährt.

Diese Darstellungsweise einer krummen Fläche überhaupt kann auch als geschehend durch die Bewegung einer zugleich als Längen-Ausdehnung sich weiter bildenden Curve in einer (nach 4) schon gebildeten krummen Fläche (vergl. 2) angesehen werden.

6.) Eine Fläche bewegt sich fortschreitend oder drehend oder Beides. Die gewöhnliche Behandlung der Körperräume (und krummen Flächen) geschieht im Grunde nach dieser genetischen Auffassung des Begriffes, wie aus der Bemerkung erhellt, daß in der Function $0 = f(x, y, z)$ die Annullirung von einer unter den Veränderlichen die (gesetzmäßig wandelbare) Erzeugungsfläche liefert. Wiederholung der krummen Fläche (4)

als Grenze des gebildeten Körperraumes. (Coordinaten-Methode.)

Die Ueberzeugung von der Möglichkeit der Auffassung eines einfachen Zusammenhanges unter diesen verschiedenen Methoden, die Linien, Flächen und Körper zu behandeln, geht hieraus wohl zur Genüge hervor, wenn man die Anordnung auch noch auf verschiedene andere Arten treffen, z. B. die Gerade und Ebene mit berücksichtigen, auch die Sonderung der Flächen in einfach und doppelt gebogene durchführen, die Sätze 1, 3 und 4, so wie die 2, 5 und 6 zuerst in einen einzigen allgemeineren zusammenfassen kann ꝛc. ꝛc. Nur daß das vorher ausgesprochene Haupt-Princip fest steht und sich daraus sämmtliche analytische Erzeugungsweisen der geometrischen Objecte, so wie sämmtliche Methoden entwickeln.

Fragt man nach der Zukunft der neuen Methode, die wegen der größeren Leichtigkeit, womit sie eine Reihe wesentlicher Resultate gewinnt, selbst dann noch Eingang finden und weiter ausgebildet werden müßte, wenn sie sich nicht als eine ursprüngliche und nothwendige hätte darstellen können, so ist wahrscheinlich und wünschenswerth, daß sie sich zunächst in sich selbst, und für den Anfang in Bezug

Dresden,
gedruckt in der Buchdruckerei von Ernst Blochmann.

9.-711

THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building